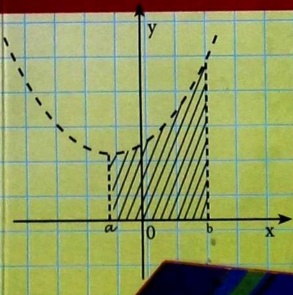
М. СУЛТАНБАЕВ

АЛГЕБРА

ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ БОЮНЧА МААЛЫМДАМА

МАСЕЛЕ-МИСАЛДАР ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ МЕНЕН



$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

УДК: 33
ББК: 22,1 Кырг.
С – 49.

Рецензенттер:
Е. Е. Син – педагогика илимдеринин доктору, профессор
А. Б. Байзаков – физико-математика илимдеринин доктору, профессор

КББАнын окуучутуулар кеңешинин 2017-жылдын 29-июнь № 5 жыйынынын токтомунда бекитилген

Султанбаев Маданбек
С – 49 Алгебра. Маалымдама. 11-класс. – Б.: 2017. – 288 б.

ISBN 978-9967-27-114-0

Бул китеп мектеп окуучуларына, студенттерге жана жаш математика мугалимдерине "Алгебра жана анализдин башталышын" өз алдынча окуп үйронүүчүлөргө колдонмо катары арналат.

Китепте бүтүрүүчүлөр үчүн экзамендерге даярданууда, жалпы республикалык тестирлөөгө даярданууда абдан зарыл материалдар, башкача айтканда теориялык билимди практика жүзүндо аткара билүүгө карата ар түрдүү деңгээлдеги маселе-мисалдарды чыгаруу усулдары берилди.

ISBN 978-9967-27-114-0

Кириш сөз

Кымбаттуу окуучулар!

Бул маалымдама китеп, жалпы билим берүүчү мектептердин математика курсунун программалык материалдарынын негизинде «Алгебра жана анализдин башталышы» боюнча 11-класстарга түзүлдү.

Китептеги теориялык материалдар, көнүгүүлөр үчүн берилген маселе-мисалдар, «жөнөкөйдөн татаалга» принциби боюнча түзүлүп чыкты. Тактап айтканда баштапкы функцияны табу эрежелери, аныкталбаган интегралды табу эрежелери, көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялардын аныктамалары жана касиеттери кыскача түрдө баяндалып, ар түрдүү деңгээлдеги маселе-мисалдар чыгарылыштары менен сунушталды. Ойлонууну талап кылган стандарттык эмес ыкмалар менен чыгарылуучу көнүгүүлөр да кошулду.

Силердин бүтүрүүчү класс экендигиңер эске алынып, маалымдама китепке тиркеме катары 5–11-класстын математика боюнча көнүгүүлөрү камтылган тесттик тапшырмалар чыгарылыштары менен берилди.

Бул китеп силерге бүтүрүү экзамендерин ийгиликтүү тапшырууга, жалпы республикалык тестирлөөгө мыкты даярданууга, китеп менен өз алдынча иштеп, билимиңерди өркүндөтүүгө көмөк көрсөтөт деген чоң үмүттөмүн.

Силерге илим-билим жолунда ак жол, албан-албан ийгиликтерди каалайм.

Автор.

Китеп боюнча ойлорду жана сын-пикирлерди «Кут-Билим сабак» гезитине бериңиздер.

Байланыш телефон: 0554 44 06 28.

I бөлүм.

Баштапкы функция жана интеграл.

1.1 Баштапкы функция. Аныкталбаган интеграл.

Аныктама.

Эгерде берилген (a, b) *интервалындагы ар кандай* x *чекити үчүн* $f(x)$ *функциясынын мааниси* $F(x)$ *функциясынын туундусунун маанисине барабар*

б.а. $F'(x) = f(x)$ *болсо, анда* $F(x)$ *функциясы* $f(x)$ *функциясынын* (a, b) *интервалындагы баштапкы функциясы деп аталат.*

1-мисал. $F(x) = \frac{x^6}{3}$ *функциясы* $f(x) = 2x^5$ *функциясы үчүн баштапкы функция болушун далилдегиле.*

Чыгаруу: $F(x) = \frac{x^6}{3}$ *функциясы* $(-\infty; +\infty)$ *интервалында аныкталган, анын ушул аралыктагы туундусун табабыз.*

$F'(x) = \left(\frac{x^6}{3}\right)' = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^5 = 2x^5$ *демек,* $(-\infty; +\infty)$ *интервалында* $F(x)$ *функциясы* $f(x)$ *функциясынын баштапкы функциясы болот. Ошондой эле* $F(x) = \frac{x^6}{3} + 5$ *функциясы да* $f(x) = 2x^5$ *функциясынын баштапкы функциясы болот. Анткени* $x \in (-\infty; +\infty)$ *үчүн*

$$F'(x) = \left(\frac{x^6}{3} + 5\right) = 2x^5 = f(x)$$

Ошентип ар кандай турактуу сандын туундусу $c' = 0$ *болгондуктан* $F(x) + c = \frac{x^6}{3} + c$ *функциясы да* $f(x)$ *функциясынын баштапкы функциясы болот.*

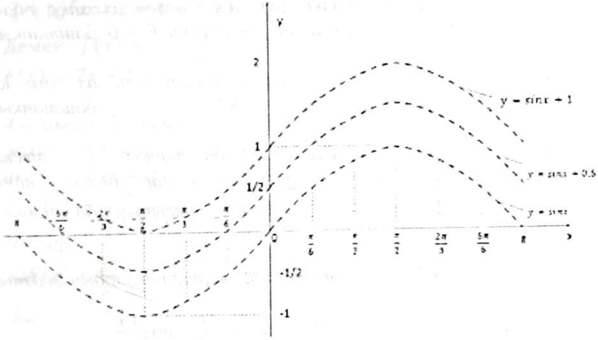
Демек $f(x) = 2x^5$ *функциясынын баштапкы функциясы чексиз көп.*

2-мисал. $F(x) = sinx + 7$ *функциясы* $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында* $f(x) = cosx$ *функциясынын баштапкы функция болушун көрсөткүлө:*

Чыгаруу: $F(x) = (sinx + 7)' = (sinx)' + 7' = cosx = f(x)$.

Баштапкы функциялар болгон $y = sinx$,

$y = sinx + 0{,}5$ $y = sinx + 1$ *функцияларынын графиктери Оу огун тик бойлото паралель жылдыруудан алынат.(1-сүрөт)*



1-сүрөт

Төмөнкү эки теоремада баштапкы функциялардын негизги касиеттери баяндалат.

Теорема 1. *(функциянын турактуулук белгиси)*

Эгерде кандайдыр бир $(a; b)$*аралыгында* $F'(x) = 0$ *болсо, анда F функциясы* $(a; b)$ *аралыгында турактуу чоңдук болот.*

Теорема 2. *Эгерде* $f(x)$ *функциясы* $(a; b)$ *аралыгында аныкталган болсо, анда анын каалагандай баштапкы функциясын*

$$F(x) + C$$

түрүндө жазууга болот, мында $F(x)$ *функциясы* $f(x)$ *функциясынын* $(a; b)$ *аралыгындагы баштапкы функцияларынын бири,* $C -$ *каалагандай турактуу сан.*

Эскертүү: Теоремалар далилдөөсүз берилет. Кээ бир функциялардын баштапкы функцияларынын таблицасы.

f функциясы	k (турактуу)	x^n $n \in Z$, $n \neq 1$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$sinx$	$cosx$	$\frac{1}{cos^2x}$	$\frac{1}{sin^2x}$
f функциясынын баштапкы функциялары.	$kx + c$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$2\sqrt{x} + c$	$-cosx + c$	$sinx + c$	$tgx + c$	$-ctgx + c$

Функциянын баштапкы функциялары төмөндөгүдөй үч эреже боюнча табылат.

1-эреже. *Эгер f үчүн баштапкы функция F болсо, ал эми g үчүн баштапкы функция G болсо, анда $f + g$ үчүн $F + G$ баштапкы функция болот.*

2-эреже. *Эгер f үчүн F функциясы баштапкы, ал эми k туруктуу чоңдук болсо, анда kf үчүн KF функциясы баштапкы функция болот.*

3-эреже. *$f(x)$ функциясы үчүн $F(x)$ баштапкы функциясы болуп, жана $k \neq 0$, b туруктуу чоңдуктар болсо, анда $\frac{1}{k}F(kx+b)$ функциясы $f(kx+b)$ функциясынын баштапкы функциясы болот.*

3-мисал. $f(x)$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла.

а) $f(x) = x^5 + 4;$ в) $f(x) = sin^2\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2};$

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2;$ г) $f(x) = 3 + tg^2x.$

Чыгаруу:

а) $f\ (x) = x^5 + 4$, x^5 *нин баштапкысы* $\frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6}$,

4 түн баштапкысы $4x$ *болот.*

Демек, 1-эреже боюнча $F(x) = \frac{x^6}{6} + 4x + c$ *болот.*

таблицадагы туруктуу сандын, x^n нын баштапкы функцияларын табуу эрежесин пайдаланабыз.

2-теореманы колдонобуз.

Чыгаруу: б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2;$ *таблицаны пайдаланабыз*

$F(x) = 2\sqrt{x} + 2x + c;$

Чыгаруу

Чыгаруу: в) $f(x) = sin^2\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2};$

$cos^2 \propto - sin^2 \propto = cos2 \propto$ *формуласын колдонуп,*

$sin^2\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2}$ *туюнтмасын жөнөкөйлөтүп алабыз.* $sin^2\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2} = -\left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right) = -cos\,x.$

Демек, $f(x) = -cos\,x$, *таблианы пайдаланып*

$F(x) = sin\,x + c$ *баштапкы функцияны табабыз.*

Чыгаруу: г) $f(x) = tg^2x + 3;$

$1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x}$ *формуласын колдонобуз.*

$3 + tg^2x = 2 + 1 + tg^2x = 2 + \frac{1}{cos^2 x}$

Демек, $f(x) = 2 + \frac{1}{cos^2 x}$, *таблицаны колдонобуз*

$F(x) = 2x + tgx + c$ *болот.*

4 – мисал. Төмөнкү функциялар үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = x^5 - 8x^3 + 6x - 5$; *в)* $f(x) = (3x-5)^5$;

б) $f(x) = -\frac{3}{x^5} + \frac{2}{sin^2(2x-1)}$; *г)* $f(x) = \frac{2}{(2-3x)^4}$

Чыгаруу:

а) $F(x) = \frac{x^6}{6} - 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + c = \frac{x^6}{6} - 2x^4 + 3x^2 - 5x + c$;

Чыгаруу: б) $F(x) = -3 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(-ctg(2x-1)\right) + c =$

$$= -3 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} - ctg(2x-1) = \frac{3x^{-4}}{4} - ctg(2x-1) + c$$

Чыгаруу: в) $F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-5)^6}{6} + c = \frac{(3x-5)^6}{6} + c$

Чыгаруу: г) $F(x) = 2 \cdot \left(\frac{(2-3x)^{-4+1}}{-4+1} = 2 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \frac{(2-3x)^{-3}}{-3} =\right.$

$$= -\frac{2}{9(2-3x)^3} + c.$$

Аныктама.

Берилген $f(x)$ *функциясынын баштапкы функциясынын жыйындысы* $f(x)$ *функциясынын аныкталбаган интегралы деп аталат. Ал төмөндөй белгиленет.*

$\int f(x)dx.$ *«*$f(x)$ *функциясынын аныкталбаган интегралы» – деп окулат.*

Мында; $\int$ *– символу интеграл белгиси,* $f(x)$ *– интеграл астындагы функция,* $f(x)dx$ *интеграл астындагы туюнтма,* x *– интегралдоонун өзгөрмөсү.*

Эгерде $F(x)$ *функциясы* $f(x)$ *функциясынын баштапкы функциясы болсо, анда 2 – теореманын негизинде*

$\int f(x)dx = F(x) + C$ *болот, мында* C *- турактуу сан.*

Аныкталбаган интегралды табуунун эрежелери.

1. $\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$
2. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$
3. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$ *мында* k *- турактуу сан.*

Функциялардын аныкталбаган интегралын табууда, баштапкы функцияларды табуу таблицасын же төмөндөгүдөй интегралдоо формулаларын колдонобуз.

Интегралдоонун негизги таблицалары

Аныкталбаган интеграл.	*Себеби.*
1. $\int 0dx = C$	$C' = 0,$
2. $\int adx = ax + C,$	$(ax + C)' = a,$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n,$
4. $\int sinxdx = -cosx + C,$	$(-cosx + C)' = sinx$
5. $\int sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}cos(kx+b) + C$	$\left(-\frac{1}{k}cos(kx+b)\right)' = sin(kx+b)$
6. $\int cosxdx = sinx + C.$	$(sinx + C)' = cosx.$
7. $\int cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}sin(kx+b) + C.$	$\left(\frac{1}{к} sin(kx + в)\right)' = cos(kx + в)$
8. $\int \frac{1}{cos^2x} \cdot dx = tgx + C,$	$(tgx + C)' = \frac{1}{cos^2x},$
9. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$	$(-ctgx + C)' = \frac{1}{sin^2x},$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C$	$(arc\sin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin\frac{x}{a} + C$	$\left(-arc\cos\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\lvert x\rvert < \lvert a\rvert,$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tgx + C,$	$(arc\,tgx + C)' = \frac{1}{1+x^2},$

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot arc\,tg\frac{x}{a} + C = -arcctg\frac{x}{a} + C,$	
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$(2\sqrt{x} + C)' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

Бул формулалар интеграл астындагы фукнкциялар чексизге айланбаган чекиттер үчүн гана туура.

5-мисал. Төмөнкү интегралдарды тапкла.

а) $\int x^{10}dx;$

б) $\int(3x^2 + 7)dx;$

в) $\int(x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x + 7)($

г) $\int\left(\frac{2}{sin^2x} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx;$

д) $\int 2x^2\sqrt{x}dx;$

е) $\int\left(cosx + \frac{1}{cos^2x}\right)dx$

ж) $\int\left(sinx + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

з) $\int cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)dx$

и) $\int sin\,(5x + 2)dx;$

к) $\int \frac{3dx}{(4x-5)^5}.$

Чыгаруу: Мисалдарды чыгарууда баштапкы функцияларды табуунун үч эрежесин, интегралдоо таблицасын, аныкталбаган интегралдын үч касиетин пайдаланабыз.

а) $\int x^{10}dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + C = \frac{x^{11}}{11} + C;$	*3 – таблица пайдаланылды.*
б) $\int(3x^2 + 7)dx = \int 3x^2dx +$ $+ \int 7dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 7x + C =$ $= x^3 + 7x + C;$	*Интегралдоонун 2-3- касиети, 2-3- формулалары пайдаланылды*
в) $\int(x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x + 7)dx =$ $= \int x^5dx + \int 3x^4dx + \int 5x^3dx +$ $+ \int 2xdx + \int 7dx =$ $= \frac{x^6}{6} + 3 \cdot \frac{x^5}{5} - 5 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + C =$ $= \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + x^2 + 7x + C;$	*Интегралдоонун 2-3- касиети, интегралдоонун 2– 3 - формулалары пайдаланылды*
г) $\int\left(\frac{2}{sin^2x} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int\frac{2}{sin^2x}dx +$ $+ \int\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int\frac{1}{sin^2x} \cdot dx +$ $+5\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2 \cdot (-ctgx) +$ $+5arcsinx + C = -2ctgx +$ $+5arcsinx + C;$	*интегралдоонун 2-3-касиети, интегралдоонун 9-10-формулалары пайдаланылды.*

д) $\int 2x^2\sqrt{x}dx = 2\int x^{2\frac{1}{2}}dx = 2\cdot\frac{x^{2\frac{1}{2}+1}}{2\frac{1}{2}+1} +$ $+C = 2\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{4x^{3\frac{1}{2}}}{7} + C = \frac{4x^3\sqrt{x}}{7} + C;$	*Рационал көрсөт-күчтүү даражанын касиеттери, Интегралдоонун 3-касиети, Интегралдоонун 3-формуласы пайдаланылды.*
е) $\int\left(cosx + \frac{1}{cos^2x}\right)dx = \int cosx\,dx +$ $+\int\frac{1}{cos^2x}dx = sinx + tgx + C;$	*6-формула, 8-формула пайдаланылды.*
ж) $\int\left(sinx + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \int sinx\,dx +$ $+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = -cosx + arc\,tgx + C;$	*4-формула, 12-формула пайдаланылды.*
з) $\int cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)dx =$ $= \frac{1}{3}sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + C;$	*баштапкы функцияны табуунун 3-эрежеси, 6-формула пайдаланылды.*
и) $\int sin(5x+2)dx =$ $= -\frac{1}{5}cos(5x+2) + C;$	*3-эреже, 4-5-формула пайдаланылды.*
к) $\int\frac{3dx}{(4x-5)^5} = 3\int(4x-5)^{-5}dx = 3\cdot$ $\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x-5)^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{3}{4}\cdot\frac{(4x-5)^{-4}}{-4} + C =$ $= -\frac{3}{16(-4x-5)^4} + C;$	*Рационал көрсөт-күчтүү даражанын касиеттери, Интегралдоонун 3-касиети, Интегралдоонун 3-формуласы пайдаланылды.*

1.1. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

1. Берилген аралыкта f функциясы үчүн F функциясы баштапкы функция болобу?

а) $F(x) = x^{10} + 3,\quad f(x) = 10x^9,\quad x\epsilon(-\infty; +\infty)$

б) $F(x) = x^{-6} + 2x,\quad f(x) = -6x^{-7} + 2,\quad x\epsilon(-\infty; +\infty)$

в) $F(x) = 3 + sinx,\quad f(x) = cosx,\quad x\epsilon(-\infty; +\infty)$

г) $F(x) = tgx - 4,\quad f(x) = \frac{1}{cos^2x}\quad x\epsilon\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

2. f функциясынын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = 3x^2 + x - 5$; *д)* $f(x) = \frac{1}{cos^2 x} + x^3$;

б) $f(x) = (sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2})^2$; *е)* $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 2x^{-4}$;

в) $f(x) = -8x^3 + \frac{5}{x^3} + 3x^2 - 9$; *ж)* $f(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$;

г) $f(x) = \frac{4}{cos^2 x} + \frac{3}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$; *з)* $f(x) = 4cos2x + 6x + \frac{4}{x}$.

3. Түз сызык боюнча кыймылда болгон чекиттин ылдамдыгы $\vartheta(t) = t^2 + 2t - 1$ формуласы аркылуу берилген. Эгерде чекит убакыттын баштапкы моментинде $(t = 0)$ координаттык башталышта болсо, анда анын координатасынын убакыт t дан болгон көз карандылыгынын формуласын жазгыла.

4. Түз сызыктуу кыймылдагы чекиттин ылдамдануусу $a(t) = 12t^2 + 4$. Эгерде анын ылдамдыгы $t = 1$ моментинде 10м/с, ал эми координатасы 12 болсо, анда чекиттин кыймылынын законун тапкыла.

5. Төмөнкү аныкталбаган интегралдарды тапкыла:

а) $\int 9dx$; з) $\int (5x^4 - 2x^2 + 7)\, dx$;

б) $\int 5x\ dx$; и) $\int \frac{7x^6+3}{x^4} dx$;

в) $\int x^2 dx$; к) $\int (3x - 5)^{10} dx$;

г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; л) $\int \frac{7}{cos^2(4x+1)} \cdot dx$;

д) $\int 3cosx\ dx$; м) $\int \left(\frac{2}{sin^2 x} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$;

е) $\int \frac{1}{sin^2 x} dx$; н) $\int 2x\sqrt{x}\, dx$;

ж) $\int sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) dx$; о) $\int \left(\frac{1}{(3x-1)^4} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

6. Түз сызыктуу кыймылдагы чекиттин ылдамдануусу $a(t)$га барабар. Эгерде $t = t_0$ болгондо чекиттин координатасы x_0 го, ал эми ылдамдыгы φ_0 гө барабар болсо, анда чекиттин кыймылынын законун тапкыла:

$$a(t) = 8t + 8,\ \ t_0 = 0,\ \ x_0 = 6,\ \ \varphi_0 = 3.$$

7. Массасы m болгон материалдык чекит Ох огун бойлото багытталган күчтүн аракети астында ушул ок боюнча кыймылга келет. Бул күч убакыттын t моментинде F(t) га барабар. Эгерде t=t₀ болгондо ылдамдык ϑ_0 гө, ал эми координатасы x_0 гө барабар болсо, $x(t)$нын t убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла.

($F(t)$ – ньютон, t – секунда, ϑ – м/с, m – кг)

$F(t) = 21t; \quad t_0 = \pi, \ \vartheta_0 = 2, \ x_0 = 3, \quad m=7.$

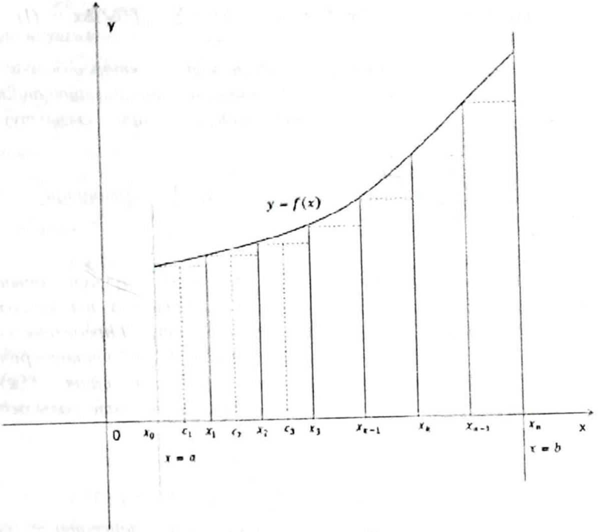
8. f тин F, баштапкы функциякциясыны графиги M чекити аркылуу, F_2 баштапкы функциясынын графиги N чекити аркылуу өтөт. Бул баштапкы функциялардын айырмасы эмнеге барабар?

Эгерде: $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $M(-1;1)$, $N(0;3)$ болсо, F_1 жана F_2 функцияларынын кайсынысынын графиги жогору жайгашкан?

1.2. Аныкталган интеграл.
Ийри сызыктуу трапециянын аянты.

Берилген $[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана белгисин өзгөртпөгөн $y = f(x)$ функциясы берилсин. Ушул функциянын графиги менен, $[a;b]$ кесиндиси жана $x = a$, $x = b$ түз сызыктары менен чектелген фигураны ийри сызыктуу трапеция дейбиз.

Ушул трапециянын аянтын табуу талап кылынсын.



2-сүрөт

Бул трапециянын аянтын табуу үчүн $[a;b]$ *сегментин* $x_k(k = 0;\ 1,\ 2, 3 \dots n)$ *чекиттери менен* n *бөлүккө бөлөбүз. Мында* $a = x_0,\ b = x_n$.

Бөлүү чекиттерине Ox *огуна перпендикуляр түздөрдү жүргүзүп, аларды функциянын графиги менен кесилишкенче созобуз. Анда ийри сызыктуу трапеция* n *бөлүккө бөлүнөт. Ар бир* $[x_{k-1};\ x_k]$ *сегментинин каалаган* C_k *'элементи үчүн* $(C_k; f(C_k))$ *чекитинен* Ox *огуна жарыш түз сызык жүргүзсөк* $x_k - x_{k-1}$ *кесиндиси,* $y = 0$ *жана* $y = f(C_k)$ *элементи үчүн түздөрү менен чектелген* B_k *тик бурчтукун алабыз.*

B_k *тик бурчтугунун аянты*

$S_{B_k} = (x_k - x_{k-1}) \cdot f(C_k)$, *эгер* $x_k - x_{k-1} = \Delta x$ *деп алсак, анда*

$S_{B_k} = f(C_k)\Delta x$ *болот. Анда ийри сызыктуу трапециянын аянты*

$$S_{т} = f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x +''' + f(C_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \qquad (1)$$

болот. Мында $\sum$– белгиси сумманы билдирет.

Эгерде $[a; b]$ сегментинин чексиз көп бөлөктөргө болсок, анда $[x_{k-1}; x_k]$ сегментин чексиз кичиреет, башкача айтканда $\Delta x \to 0$ анда (1) сумма биз издеген ийри сызыктуу тропетциянын аянты болот.

$$S_n = lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x, \qquad (2)$$

Бул сумма (2) $f(x)$ функциясынын $[a; b\,]$ сегментиндеги интегралдык суммасы деп аталат.

Аныктама.

Эгерде $[a; b\,]$ сегментин бөлүктөргө бөлүүнүн санын (n ди) чексиз чоңойткондо башкача айтканда δ ны чексиз кичирейткенде (2) интегралдык суммасы чектүү J пределине ээ болсо жана ал предел x_k менен C_k $(k = 1,2, \ldots\, n)$ чекиттерин тандоодон көз каранды болбосо, анда J саны $f(x)$ функциясынын $[a; b\,]$ сегментиндеги аныкталган интегралы деп аталат жана ал интеграл.

$\int_a^b f(x)\, dx$ *менен белгиленет.* (3)

Демек, $\int_a^b f\,(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = J$ (3)

Аныкталган интеграл төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

1^0.*Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b\,]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай турактуу чоңдук $C \in R$ үчүн $\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)\, dx$ болот.*

2^0.*Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a; b\,]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда*

$\int_a^b [\varphi(X) + g(X)Dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

барабардыгы аткарылат.

3^0. *Эгерде $\varphi(x)$, $g(x)$ функциялары $[a; b]$ сегментинде интегралдануучу функция болсо жана ар кандай $x \in [a; b\,]$ үчүн $f(x) \le g(x)$ болсо, анда* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)\, dx$ *барабарсыздыгы аткарылат.*

4^0.*Эгерде $f(x)$ функциясы $[a; b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда кандайдыр бир $C \in [a; b]$ үчүн $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$ барабардыгы аткарылат.*

5^0. *Эгерде* $f(x)$ *функциясы* $[a;b]$ *кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай* $C \in [a;b]$ *үчүн* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$ *болот, мындан* $\int_a^a f(x) = 0$ *барабардыгы келип чыгат.*

6^0. *Эгерде* $f(x)$ *функциясы* $[a;b]$ *кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ал функция* $[a;b]$ *чектелген болот, башкача айтканда ар кандай* $x \in [a;b]$ $|f(x)| \le M$ *барабарсыздыгы аткарылгандай* $0 < M$ *саны табылат.*

1.3. Жогорку предели өзгөрүлмө интеграл жана Ньтон – Лейбництин формуласы.

Эгерде $f(x)$*функциясы* $[a;b]$ *кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда ар кандай* $x \in [a;b]$ *үчүн берилген функия* $[a;x]$ *кесиндисинде дагы интегралдануучу функция болот, б.а. ар кандай* $x \in [a;b]$ *үчүн* $\int_a^x f(b)dt$ *интегралы аныкталат. Бул интеграл жогорку предели өзгөрүлмө интеграл деп аталат.*

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *функциясы (4)* $[a;b]$ *сегментинде аныкталат жана ар кандай* $x \in [a;b]$, *үчүн* $F(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$ *барабардыгы,* $\int f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + C$ *аткарылат.*

Эми аныкталган интегралды эсептөөдө кеңири колдонуучу Ньютон-Лейбництин формуласы менен таанышабыз.

Теорема. Эгерде $f(x)$ *функциясы* $[a;b]$ *сегментинде үзгүлтүксүз функция болсо жана* $F(x)$ *функциясы* $[a;b]$ *сегментинде* $f(x)$ *функциясынын каалагандай баштапкы функциясы болсо, анда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a) \quad (4)$$

формуласы орун алат. Бул формула Ньтон – Лейбництин формуласы деп аталат.

1- Мисал: Ньтон – Лейбництин формуласын колдонуп, төмөнкү интегралды.

Эсептегиле:

а) $\int_1^4 6x\,dx$; *г)* $\int_{-1}^2 3x^2\,dx$; *ж)* $\int_0^1 (2x^3 - x + 1)\,dx$;

б) $\int_{10}^{15} dx$; *д)* $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; *з)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin5x\,dx$;

в) $\int_3^5 4dx;$ *е)* $\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx;$ *и)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

Чыгаруу: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)$ *формуласын пайдаланабыз.*

а) $\int_1^4 6x\,dx = 6\cdot\frac{x^2}{2}\,|_1^4 = 3x^2\,|_1^4 = 3\cdot 4^2 - 3\cdot 1^2 = 3\cdot 16 - 3 = 45;$

б) $\int_{10}^{15} dx = x\,|_{10}^{15} = 15 - 10 = 5;$

в) $\int_3^5 4dx = 4x\,|_3^5 = 4\cdot 5 - 4\cdot 3 = 20 - 12 = 8;$

г) $\int_{-1}^2 3x^2\,dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\,|_{-1}^2 = x^3\,|_{-1}^2 = 2^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9;$

д) $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\,|_0^1 = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}\,|_0^1 = \frac{3\cdot 1^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{3\cdot 0^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5};$

е) Аныкталган интегралдардын 1-2 – касиетин пайдаланабыз.

$$\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + 2\int_{-1}^0 x\,dx = \frac{x^3}{3}\,|_{-1}^0 + 2\cdot\frac{x^2}{2}\,|_{-1}^0 =$$

$$= \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + 0^2 - (-1)^2 = 0 + \frac{1}{3} + 0 - 1 = -\frac{2}{3};$$

ж) $\int_0^1 (2x^3 - x + 1)dx = \int_0^1 2x^3 - \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 dx =$

$$= 2\cdot\frac{x^4}{4}\,|_0^1 - \frac{x^2}{2}\,|_0^1 + x\,|_0^1 = \frac{1^4}{2} - \frac{0^4}{2} - \frac{1^4}{2} + \frac{0^2}{2} + 1 - 0 =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} + 0 + 1 - 0 = 1;$$

з) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\;dx = -\frac{1}{5}\cos 5x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{5}\cos 5\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos 5\cdot 0 =$

$$= -\frac{1}{5}\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos 0 = -\frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{5}\cos 0 = -\frac{1}{5}\cdot 0 +$$

$$+ \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5};$$

и) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x\,|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1 - 0 = 1.$

1.3. Аныкталган интегралдын колдонулушу. Тегиздиктиктеги фигуранын аянты.

Ийри сызыктуу трапециянын аянты

$S = \int_a^b \varphi(x)dx$ *формуласы менен эсептелет.*

1-мисал. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуралардын аянттарын эсептегиле:

а) $y = x + 2,$ $y = 0,$ $x = 1,$ $x = 4,$

б) $y = x^3,$ $y = 8,$ $x = 1.$

в) $y = x^2 - 4x + 5, \quad y = 5.$

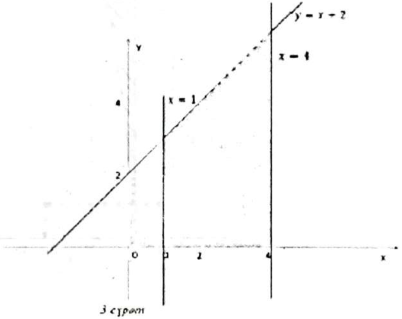
г) $y = 2cosx, \qquad y = 1, \quad x = -\frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{\pi}{3}$

Чыгаруу: а)Адегенде сызыктар менен чектелген фигуралардын сүрөттөрүн чийип алабыз. $y = x + 2$,

$y = 0, \quad y = 1, \quad x = 4, \quad y= x + 2$ *функциясынын графигин чиебиз.*

x	*0*	*2*
y	*2*	*4*

y=0 бул, абцисса огу болуп эсептелет. Демек, чиймеде көрсөтүлгөн трапециянын аянтын табабыз.



3 сүрөт

$$\int_1^4 (x+2)dx = \int_1^4 xdx + \int_1^4 2 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\,|_1^4 + 2x\,|_1^4 =$$

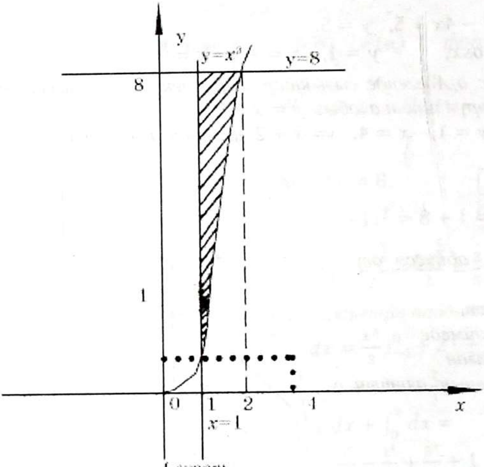
$= \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} + 8 - 2 = 8 - \frac{1}{2} + 6 = 13\frac{1}{2}$ *кв. бирдик.*

Жообу: трапециянын аянты $13\frac{1}{2}$ *кв. бирдик.*

б) Чыгаруу: $y = x^3$, $\qquad y = 8, \quad x = 1$ *сызыктары менен чектелген фигураны чийип алабыз.*

$y = x^3$

y	*0*	*1*	*2*
x	*0*	*1*	*8*



4-сүрөт

Чиймедеги фигуранын аянтын табуу үчүн $x = 1, x = 2,\ y = 0,\ y = 8$ *түз сызыктары менен чектелген тик бурчтуктун аянтынан,* $y = x^3;\ x = 2;\ x = 1$ *сызыктары менен ийри сызыктуу трапециянын аянтын кемитебиз.*

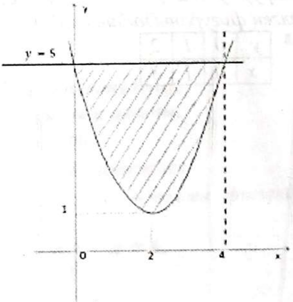
$$S = \int_1^2 8\,dx - \int_1^2 x^3\,dx = 8x\ |_1^2 - \frac{x^4}{4}\ |_1^2 = 8\cdot 2 - 8\cdot 1 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) =$$

$$= 8 - \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 8 - 3\frac{3}{4} =$$

$$4\frac{1}{4}$$

Жообу: $4\frac{1}{4}$ *кв. бирдик.*

в) Чыгаруу: $y = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1.$ *демек* $m = 2,\ n = 1$ *параболанын чокусу* $(2; 1)$ *чекити болот. Штрихтелген фигуранын аянтын табуу үчүн* Oy, Ox *октору жана* $y = 5,\ x = 4$ *түз*



5-сүрөт

сызыктары менен чектелген тик бурчтуктун аянтынан, $y = x^2 - 4x + 5$ *параболасынан түзүлгөн ийри сызыктуу трапециянын аянтын кемитип коёбуз.*

$$\int_0^4 5dx - \int_0^4 (x^2 - 4x + 5)dx = 5x\,|_0^4 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)|_0^4 =$$

$$= 5 \cdot 4 - 5 \cdot 0 - \left(\left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0\right)\right) =$$

$$= 20 - \left(\frac{64}{3} - 32 + 20\right) = 20 - 9\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ кв. бирбик.}$$

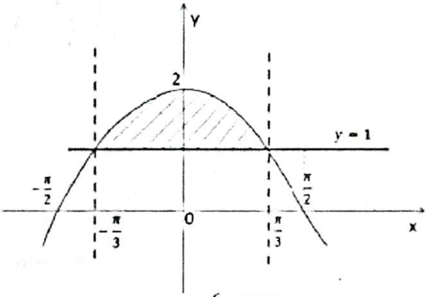
Жообу: $S = 10\frac{2}{3}$ *кв. бирдик.*

г) Чыгаруу:

$y = 2\cos x$,

$y = 1,\ x = -\frac{\pi}{3}$,

$x = \frac{\pi}{3}$ *ушул сызыктар менен чектелген фигуранын чиймесин чийип алабыз.*



6-сүрөт

$y = 2\cos x$ *тин графиги,* $x = -\frac{\pi}{3};\ x = \frac{\pi}{3}$ *сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтынын,* $y = 1,\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$ *жана* $y = 0$ *сызыктары менен чектелген тик бурчтуктун аянтын кемитсек, штрихтелген фигуранын аянты чыгат.*

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2coxdx - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 1 \cdot dx = 2sinx\,|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - x\,|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2sin\frac{\pi}{3} -$$

$$-2sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3};$$

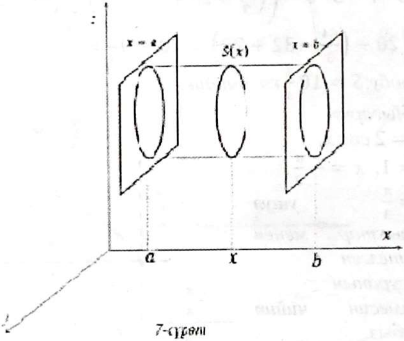
Жообу: $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ *кв. бирдик.*

а) Берилген кесилиш аянты боюнча көлөмдү эсептөө.

Теорема 1. Эгерде аныкталган $S(x)$ *функциясы* $[a; b]$ *сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда берилген нерсенин көлөмү.*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \quad (5)$$

формуласы менен эсептелет. Мында $S(x)$*- мейкиндикте берилген* $x = a$ *жана* $x = b$ *тегиздиктери менен чектелген фигуранын* xOy *тегиздигине перпендикуляр болгон тегиздик менен кесилиш аянты. (7-сүрөт).*



7-сүрөт

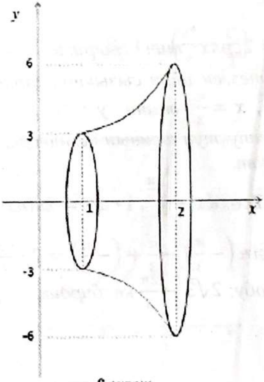
б) Жалпак фигуранын айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмү.

Теорема 2. Эгерде мейкиндиктеги нерсе, $x\,O\,y$ *тегиздигиндеги* $y = a$*,* $x = b$ *сызыктары жана* $y = f(x)$ *функциясынын графиги менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын* Ox *огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсе болсо, анда анын көлөмү*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad (6)$$

формуласы менен эсептелет.

2-мисал. Тегиздикте $y = x^2 + 2$*,* $y = 0$ *жана* $x = 1$*,* $x = 2$ *сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын* Ox *огунун*



8-сүрөт

айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу: Адегенде мисалда берилгендердин негизинде чийме чийип алабыз.

(6) формуланын пайдаланып, берилген нерсенин көлөмүн табабыз.

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2\, dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 4x^2 + 4) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + \quad 4x\right) |_1^2 = \pi \left[\left(\frac{2^5}{5} + 4\frac{2^3}{3} + \quad 4 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +4\frac{1^3}{3} + \quad 4 \cdot 1\right)\right] = \pi \left(\frac{3^2}{5} + \frac{32}{3} + 8 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3} - 4\right) = \pi \frac{293}{15} =$$

$$= 19\frac{8}{15}\pi \text{ куб. бирдик.}$$

Жообу: $V = 19\frac{8}{15}\pi$ *куб.бирдик.*

в) Өзгөрмө күчтүн аткарган жумушу.

Эгерде $F(x)$ *күчүнүн таасири астында материалдык чекит сан огунун багыты боюнча* a *чекитинен* b *чекитине жылса жана* $F(x)$ *функциясы* $[a; b]$ *сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда* $F(x)$ *күчүнүн аткарган жумушу, А жумушу*

$$A = \int_a^b F(x)dx \quad (7)$$

формуласы менен эсептелет.

3-мисал. Эгерде 2Н күч пружинаны 1 см кыска, пружинаны 4 см кысуу үчүн кандай жумуш аткарылат?

Чыгаруу: Пружинаны x ке кысуу үчүн сарпталуучу күч, Гуктун закону боюнча $F = kx$ *формуласы менен эсептелет.*

Мында $k-$ *пропорциялуулук коеффиценти,* k *нын маанисин маселенин шартын пайдаланып табабыз.*

Пружинанын $1\text{см} = 0{,}01\text{м}$ *ге кысуу үчүн 2Н күч сарпталат. Мындан* $0{,}01k = 2$ *'экендиги келип чыгат.*

$$k = 2 : 0{,}01, \;\; k = 200.$$

Анда $F(x) = 200x$ *болот.*

$a = 0,\; b = 4\text{ см} = 0{,}04\text{ м}$ *деп алсак пружинаны кысууда аткарылган жумуш* (7) *формула боюнча эсептелет.*

$$A = \int_0^{0{,}04} F(x)dx = \int_0^{0{,}04} 200x\, dx = 100 \cdot x^2 \,|_0^{0{,}04} =$$

$= 100 \cdot (0{,}04)^2 - 100 \cdot 0{,}0016 = 0{,}16$ *дж.*

Жообу: $A = 0{,}16$ *дж.*

1. 2 - 1.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

9-14. Төмөнкү аныкталган интегралдарды эсептегиле:

9. *а)* $\int_0^1 x^4 dx$; *б)* $\int_{-2}^4 x dx$; *в)* $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sinx dx$; *г)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$.

10. *а)* $\int_2^4 5dx$; *б)* $\int_1^2 (2x+3)dx$;

в) $\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx$; *г)* $\int_0^{\frac{\pi}{9}} cos3xdx$.

11. *а)* $\int_{-2}^5 dx$; *б)* $\int_0^1 \sqrt{1-x}dx$; *в)* $\int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; *г)* $\int_0^{\pi} 3cos\frac{x}{2}dx$.

12. *а)* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin^2 x}dx$; *б)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}dx$; *в)* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\frac{x}{2}dx$.

13. *а)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\frac{x}{2}dx$; *б)* $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; *в)* $\int_{-1}^1 (3x^2-4x+5)dx$.

14. . *а)* $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx$; *б)* $\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; *в)* $\int_0^{\pi} tg^2 xdx$;

г) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$; *д)* $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

15. *Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла:*

а) $F(x) = \frac{\int_0^x (S+1)dS}{x+1}$; *б)* $F(x) = (sinx)\int_0^x sintdt$.

16-21. Сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

16. $y = x^2 - 4x + 6, \quad y = x + 2, \ x = 1, \ x = 4$;

17. $y = x^2 + 2, \quad y = 0, \ x = 0, \ x = 2$;

18. $y = 2 - x^3, \quad y = 1, \ x = -1, \ x = 1$;

19. $y = sinx, \quad x = \frac{\pi}{2}, \ x = \pi, \ y = 0$;

20. $y = x^2 - 4x + 4, \ y = 4 - x^2$;

21. $y = cosx, \ y = 0, \ x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

22-27. Төмөнкү теңдемелер менен берилген сызыктар чектеген фигуралардын Ох огунун айланасында айландыруудан пайда болгон нерсенин көлөмүн тапкыла:

22. $y = x^2 + 1, \ x = 0, \ x = 1, \ y = 0$;

23. $y = \sqrt{x} + 2, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 4$;

24. $y = x^2, \ y = x$;

25. $y = x + 2, \ y = 1, \ x = 0, \ x = 2$;

26. $y = 1 - x^2, \ y = 0$;

27. $y = cosx, \ y = 0, \ x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

II бөлүм. Көрсөткүчтүү жана логарифмикалык функциялар.

2.1. Көрсөткүчтүү функция.

Аныктама.

$y = a^x$ түрүндөгү формула менен берилген функция көрсөткүчтүү функция деп аталат.

Мында $a > 0$ жана $a \neq 1$ болот.

Мисалы: $y = 7^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (0{,}75)^x$.

Көрсөткүчтүү функция төмөнкүдөй касиеттерге ээ болот.

1^0. a^x функциясынын аныкталуу областы бардык чыныгы сандардын R көптүгү.

2^0. a^x функциясынын маанилеринин областы бардык оң сандардын R көптүгү.

3^0. $a > 0$ болгондо a^x функциясы бүткүл сан түз сызыгында өсөт;

$0 < a < 1$ болгон учурда a^x функциясы R көптүгүндө кемийт.

*4^0. **x** жана **y** тин каалагандай анык маанилеринде төмөнкү барабардыктар туура:*

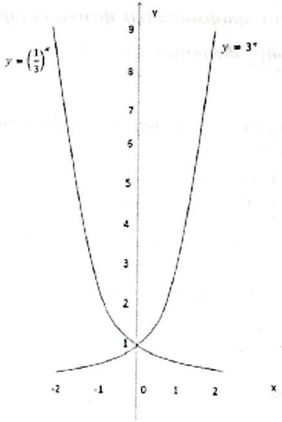
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$. *Бул формулалар даражалардын негизги касиеттери.*

1-мисал. $y = 3^x$ *жана* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ *функциясынын графигин түзгүлө.*

Чыгаруу: Төмөндөгүдөй таблица түзүп алабыз.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



9-сүрөт

3-касиетти эске алсак $y = 3^x$ функциясы өсүүчү, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функ-циясы кемүүчү болот. Бул графиктен да көрүнүп турат. Эки функциянын тең графи-ги (0;1) чекитинен өтөт. Демек ар кандай $a > 0$ үчүн x=0 болгондо y=1 болот.

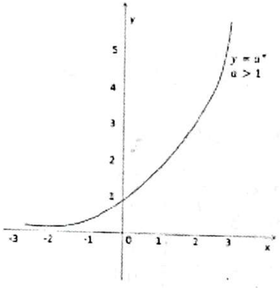
$y = 3^x$ жана $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларынын гра-фиктери Ох огуна жогору жайгашкан жана Оу огуна карата симметриялуу.

3-касиеттин негизинде $a > 1$ болгон учурда:

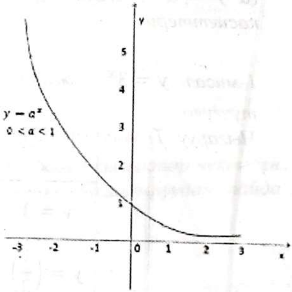
а) $x > 0$ болгондо, $a^x > 1$ болот;

б) $x = 0$ болгондо, $a^x = 1$ болот;

в) $x < 0$ болгондо, $0 < a^x < 1$ болот.



10-сүрөт



11-сүрөт

Эгерде $0 < a < 1$ болсо, анда

а) $x > 0$ болгондо, $0 < a^x < 1$ болот;

б) $x = 0$ болгондо, $a^x = 1$ болот;

в) $x < 0$ *болгондо,* $a^x > 1$ *болот.*

Демек, көрсөткүчтүү функциянын графиги жогорудагы эки учур үчүн төмөндөгүдөй болот. *(10–11-сүрөт).*

2-мисал. $y = 2 \cdot 3^x$ *жана* $y = -2 \cdot 3^x$ *функцияларынын графигин бир эле координаттык тегиздикке чийгиле.*

Чыгаруу: Таблица түзүп алабыз

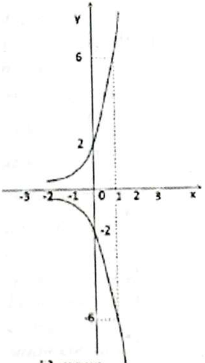
$y = 2 \cdot 3^x$ *функциясы үчүн*

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	2	6	18

$y = -2 \cdot 3^x$ *функциясы үчүн*

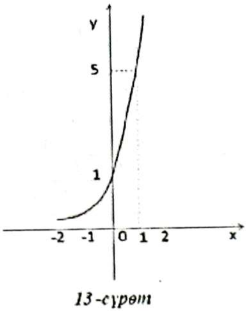
x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{3}$	-2	-6	-18

Эми таблицалар боюнча графиктерди чийебиз.



12-сүрөт

Демек, $y = 2 \cdot 3^x$ *жана* $y = -2 \cdot 3^x$ *функцияларынын графиктери Ox огуна карата симметриялуу болушат.*



13-сүрөт

3-мисал. Төмөнкү функциялардын касиеттерин санагыла жана алардын графиктерин чийгиле:

а) $y = 5^x$; *б)* $y = 0,3^x$;

в) $y = 0,7^x$; *г)* $y = 1,6^x$.

а) Чыгаруу: $y = 5^x$,

1) Бул функциянын аныкталуу

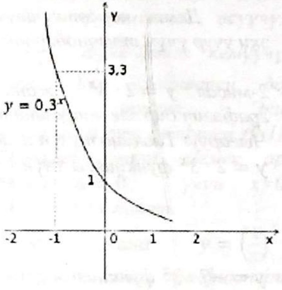
областы $D(5^x) = R$, бардык чыныгы сандар;

2) 5^x функциясынын маанилеринин областы $E(5^x) = R_+$, бардык оң сандар;

3) $5 > 1$ болгондуктан бул функция өсүүчү.

4) Графигин түзөбүз

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{5}$	1	5



14-сүрөт

б) Чыгаруу: $y = 0,3^x$, бул функциянын

1) Аныкталуу областы $D(0,3^x) = R$;

2) Маанилеринин областы $E(0,3^x) = R_+$;

3) $0,3 < 1$ болгондуктан $0,3^x$ функциясы кемүүчү

Эми графигин түзөбүз.

x	-2	-1	0	1	2
y	11,1	3,3	1	0,3	0,09

в) Чыгаруу: $y = 0,7^x$ функциясынын

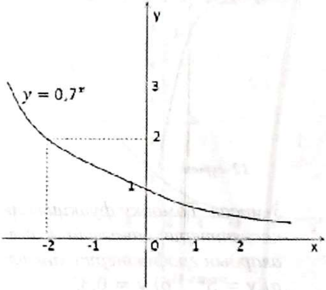
1) Аныкталуу областы $D(0,7^x) = R$;

2) Маанилеринин областы $E(0,7^x) = R_+$;

3) $0,7 < 1$ болгондуктан $0,7^x$ функциясы кемүүчү

Эми графигин түзөбүз.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1,4	1	0,7	0,49



15-сүрөт

г) Чыгаруу: $y = 1{,}6^x$ *функциясынын*

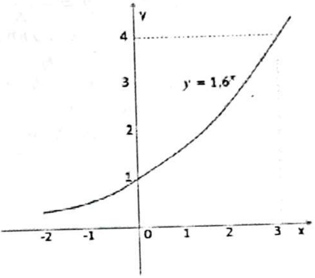
1) Аныкталуу областы $D(1{,}6^x) = R$;

2) Маанилеринин областы $E(1{,}6^x) = R_+$;

3) $1{,}6 > 1$ *болгондуктан* $1{,}6^x$ *функциясы өсүүчү.*

Эми графигин түзөбүз.

x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*0,4*	*0,6*	*1*	*1,6*	*2,6*	*4*



16-сүрөт

4-мисал. Функциялардын маанилеринин областын тапкыла.

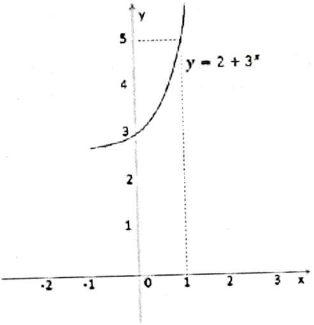
а) $y = 2 + 3^x$;

б) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$;

в) $y = -7^x$;

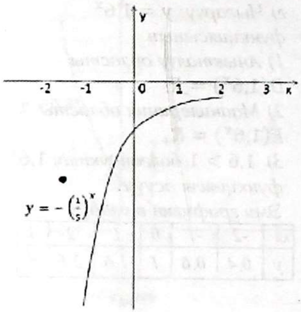
г) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x - 5$.

а) Чыгаруу: $y = 2 + 3^x$ *функциясынын болжолдуу графигин чийип алабыз. Графикке байкоо жүргүзсөңөр бул функциянын маанилеринин областы* $E(y) = (2; +\infty)$ *болот.*



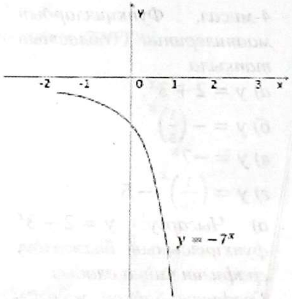
17-сүрөт

б) Чыгаруу: $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ *функциясынын болжолдуу графигин чийебиз. Графикке байкоо жүргүзсөк, функциянын маанилеринин областы* $E(y) = (-\infty; 0)$ *болот.*



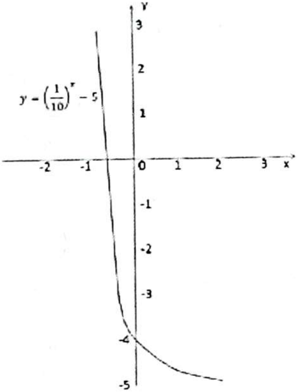
18-сүрөт

в) Чыгаруу: $y = -7^x$, *болжолдуу графигин чийебиз. Бул функциянын маанилеринин областы* $E(y) = (-\infty; 0)$ *болот.*



19-сүрөт

г) Чыгаруу: $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x - 5$, *болжолдуу график чийебиз. Бул функциянын маанилеринин областы* $E(y) = (-5;\ +\infty)$ *болот.*



20-сүрөт

5-мисал. Сандарды салыштыргыла.

а) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$ жана 1; *б)* $5^{-\sqrt{14}}$ *жана* $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$;

в) $2{,}5^{-\sqrt{2}}$ *жана 1;* *г)* $0{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ *жана* $0{,}5^{\frac{1}{4}}$.

а) Чыгаруу: $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$ жана 1;

$\frac{3}{5} < 1$ *болгондуктан* $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ *функциясы кемүүчү функция болот. 3-касиеттин негизинде* $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{7}}{3}} < 1$ *болот.*

б) Чыгаруу: $5^{-\sqrt{14}} = \frac{1}{5^{\sqrt{14}}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{14}}$ *деп өзгөртүп түзүп алабыз.* $\frac{1}{5} < 1$ *болгондуктан* $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ *функциясы 3-касиеттин негизинде кемүүчү болот, анда* $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{14}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$ *экендиги келип чыгат.*

в) Чыгаруу: $2{,}5^{-\sqrt{2}}$ *жана 1;*

$2{,}5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2{,}5^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{2{,}5}\right)^{\sqrt{2}} = (0{,}4)^{\sqrt{2}}$ *Демек 3-касиет боюнча* $(0{,}4)^{\sqrt{2}} < 1$ *болот.*

г) Чыгаруу: $0{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ *жана* $0{,}5^{\frac{1}{4}}$ *даражаларынын даража көрсөткүчтөрүн салыштырабыз.*

$\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{4}$, *демек 3-касиет боюнча* $0{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{2}} < 0{,}5^{\frac{1}{4}}$ *болот.*

6-мисал. Эсептегиле:

а) $5^{4-2\sqrt{7}} \cdot 25^{\sqrt{7}-1}$; *б)* $\left(2^{\sqrt[6]{32}}\right)^{\sqrt[6]{2}}$;

в) $16^{\sqrt{3}} : 2^{4\sqrt{3}}$; *г)* $\left(3^{1+\sqrt{3}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

Чыгаруу: Рационал жана иррационал даражалардын касиеттерин жана өзгөртүп түзүүлөрдү пайдаланабыз.

а) $5^{4-2\sqrt{7}} \cdot 25^{\sqrt{7}-1} = 5^{4-2\sqrt{7}} \cdot 5^{2(\sqrt{7}-1)} = 5^{4-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-2} = 5^2 = 25$;

б) $\left(2^{\sqrt[6]{32}}\right)^{\sqrt[6]{2}} = 2^{\sqrt[6]{32\cdot 2}} = 2^{\sqrt[6]{64}} = 2^2 = 4$;

в) $16^{\sqrt{3}} : 2^{4\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}} : 2^{4\sqrt{3}} = 1$;

г) $\left(3^{1+\sqrt{3}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(3 \cdot 3^{\sqrt{3}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 3^3 = 27$

7-мисал. Төмөнкү көрсөткүчтүү функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^x$; *б)* $5^{\sqrt{x-3}}$; *в)* $7^{\sqrt{x^2-4}}$; *г)* $3^{\frac{5}{x-7}}$.

Чыгаруу: Көрсөткүчтүү функциянын касиеттерин, квадраттык тамырдын, бөлчөктүү туюнтманын касиеттерин пайдаланабыз.

а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^x$ *бул даражанын негизи*

$\sqrt{3-\sqrt{3}} > 0$, *ошондуктан* $\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^x$ *функциясынын аныкталуу областы* $D = (-\infty; +\infty)$ *болот.*

б) $5^{\sqrt{x-3}}$ *бул туюнтма мааниге ээ болуш үчүн* $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$ *болуш керек. Демек* $5^{\sqrt{x-3}}$ *функциясынын аныкталуу областы* $D = [3; +\infty)$ *болот.*

в) $7^{\sqrt{x^2-4}}$ *туюнтмасы мааниге ээ болуш үчүн,* $x^2 - 4 \geq 0$ *болуш керек.*

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$, $x \geq 2$

$\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$, $x \leq -2$. *Демек,* $7^{\sqrt{x^2-4}}$ *функциясынын аныкталуу областы* $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ *болот.*

г) $3^{\frac{5}{x-7}}$ *бул туюнтма мааниге ээ болуш үчүн* $\frac{5}{x-7}$ *бөлчөгүнүн бөлүмү* $x - 7 \neq 0$ *болуш керек.*

$x - 7 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$x = 7$. *Демек,* $3^{\frac{5}{x-7}}$ *функциясынын аныкталуу областы 7 ден башка бардык сандар, башкача айтканда*

$D = (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.

2.1. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма.

28. Төмөнкү функциялардын касиеттерин санагыла жана алардын графиктерин чийгиле:

а) $y = 4^x$; *б)* $y = 0.2^x$; *в)* $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$; *г)* $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

29. Функциялардын маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = 1 + 2^x$; *б)* $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$; *в)* $y = -5^x$; *г)* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$.

30. Функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = 2^{x-3}$; *б)* $y = 3^{\sqrt{5-x}}$; *в)* $y = 5^{\sqrt{2-x^2}}$; *г)* $y = 4^{\frac{1}{x+5}}$.

2.2. Көрсөткүчтүү теңдемелер.

Эң жөнөкөй көрсөткүчтүү теңдеме $a^x = b$ *түрүндө болот. Мында* x *- белгисиз чоңдук,* a *- бирге барабар эмес оң сан, б.а.* $a \neq 1$ *жана* $a > 0$.

a^x *ар дайым оң сан болгондуктан* $b \leq 0$ *болгондо* $a^x = b$ *теңдемеси чыгарылышка ээ болбойт.*

Көрсөткүчтүү теңдемелерге мисалдар

$2^x = 16$; $3^{x-2} = 9$; $2 \cdot 7^x + 1 = 99$.

Эми көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаруу ыкмалары менен таанышабыз.

1. Бирдей негизге келтирип чыгаруу.

Жогорку мисалдарды ушул ыкма менен чыгаралы.

$2^x = 16$, *16 ны 2 нин даражасы түрүндө жазып алабыз.*

$2^x = 2^4$,

$x = 4$. *Жообу:* $x = 4$.

$3^{x-2} = 9$, *9 ду 3 түн даражасы түрүндө жазып алабыз.*

$3^{x-2} = 3^2$,

$x - 2 = 2$,

$x = 2 + 2$,

$x = 4$. *Жообу:* $x = 4$.

Көрсөткүчтүү теңдемени чыгаруунун бул ыкмасы даражанын төмөнкү касиетине негизделет.

Негиздери бирге барабар болбогон бирдей негиздеги эки даража барабар болсо, алардын көрсөткүчтөрү да барабар болот.

$2 \cdot 7^x + 1 = 99$,

$2 \cdot 7^x = 99 - 1$,

$2 \cdot 7^x = 98$,

$7^x = 98 : 2$,

$7^x = 49$,

$7^x = 7^2$,

$x = 2$.

Жообу: $x = 2$.

Бул теңдемени чыгарууда, теңдемелерди чыгаруунун кадимки эле эрежелерин колдонуп, акырында бирдей негизге келтирүү ыкмасы пайдаланылды.

1-мисал. Бирдей негизге келтирип, төмөнкү көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаргыла:

а) $25^{x-3} = 5^{x-2}$; *б)* $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$; *в)* $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{16}{9}$;

г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{5x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{7-x}$; *д)* $5^{x^2-3x+2} = 1$; *е)* $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$

Чыгаруу: а) $25^{x-3} = 5^{x-2}$, $25=5^2$ *түрүндө жазып алабыз.*

$5^{2(x-3)} = 5^{x-2}$,

$2x - 6 = x - 2$,

$2x - x = -2 + 6$,

$x = 4$. *Жообу:* $x = 4$.

Чыгаруу: б) $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$,

$3^{2x+1} = 3^{-3}$,

$2x + 1 = -3$,

$2x = -3 - 1$,

$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3^{-3}$ *деп өзгөртүп түзүп, бирдей негиздеги даражага келтиребиз.*

$$2x = -4,$$
$$x = -4:2,$$
$$x = -2.$$
Жообу: $x = -2$.

Чыгаруу: в) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{16}{9}$,

$$\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$
$$x = 2.$$
Жообу: $x = 2$.

Теңдеменин сол жагын өзгөртүп түзүп алабыз. оң жагын даража түрүндө жазабыз.

Чыгаруу: г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{5x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{7-x}$, $\frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ *деп өзгөртүп түзөбүз.*

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{5x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-(7-x)},$$
$$5x + 1 = -7 + x,$$
$$5x - x = -7 - 1,$$
$$4x = -8,$$
$$x = -8:4,$$
$$x = -2.$$
Жообу: $x = -2$.

Чыгаруу: д) $5^{x^2-3x+2} = 1$;

$$5^{x^2-3x+2} = 5^0,$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1,$$
$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = 1.$$
Жообу: $x_1 = 2;\ x_2 = 1$.

$1 = 5^0$ *деп алабыз, эми квадраттык теңдемени чыгарабыз.*

Чыгаруу: е) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$,

$$8^{\frac{x-1}{2}} = 4^{\frac{2-x}{3}},$$
$$2^{3\cdot\frac{x-1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{2-x}{3}},$$

Тамырды рационал көрсөткүчтүү даража түрүндө жазып алабыз, бирдей даражага келтиребиз.

$$\frac{3x-3}{2}=\frac{4-2x}{3},$$
$$9x-9=8-4x,$$
$$9x+4x=8+9,$$
$$13x=17,$$
$$x=\frac{17}{13}.$$
Жообу: $x=\frac{17}{13}$.

2. Даражалардын касиеттерин колдонуу менен чыгарылуучу көрсөткүчтүү теңдемелер.

2-мисал. а) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^x=21$; *б)* $5^{x+1}-5^{x-1}=24$;
в) $10^x+10^{x-1}=1{,}1$; *г)* $5\cdot 2^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}-1}=56$.

Чыгаруу: а) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^x=21$; $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ *касиетин колдонобуз.*
$$3^2\cdot 3^x-3\cdot 3^x+3^x=21,$$
$$9\cdot 3^x-2\cdot 3^x=21,$$
$$7\cdot 3^x=21,$$
$$3^x=21:7,$$
$$3^x=3,$$
$x=1$. *Жообу:* $x=1$.

Чыгаруу: б) $5^{x+1}-5^{x-1}=24$; $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ *касиетин колдонобуз.*
$$5\cdot 5^x-\frac{5^x}{5}=24,$$
$$25\cdot 5^x-5^x=120,$$
$$24\cdot 5^x=120,$$
$$5^x=120:24,$$
$$5^x=5,$$
$x=1$. *Жообу:* $x=1$.

Чыгаруу: в) $10^x+10^{x-1}=1{,}1$;
$$10^x+\frac{10^x}{10}=1{,}1,$$ *теңдеменин эки жагын тең 10 го көбөйтөбүз.*
$$10\cdot 10^x+10^x=11,$$
$$11\cdot 10^x=11,$$
$$10^x=11:11,$$
$$10^x=1,$$

а) $5^{\log_5 40}$; *б)* $3^{\log_3 25}$; *в)* $2^{3\log_2 3}$; *г)* $7^{2\log_7 11}$;

д) $\frac{1}{5}^{5\log_{\frac{1}{5}} 2}$; *е)* $16^{\log_4 15}$.

Чыгаруу: *а)* $5^{\log_5 40} = 40$; *б)* $3^{\log_3 25} = 25$;

в) $2^{3\log_2 3} = 2^{\log_2 3^3} = 2^{\log_2 27} = 27$;

г) $7^{2\log_7 11} = 7^{\log_7 11^2} = 7^{\log_7 121} = 121$;

д) $\frac{1}{5}^{5\log_{\frac{1}{5}} 2} = \frac{1}{5}^{\log_{\frac{1}{5}} 2^5} = \frac{1}{5}^{\log_{\frac{1}{5}} 32} = 32$;

е) $16^{\log_4 15} = 4^{2\log_4 15} = 4^{\log_4 15^2} = 4^{\log_4 225} = 225$.

3-мисал. x *санын тапкыла.*

а) $\log_7 x = 2$; *б)* $\log_3 x = 4$; *в)* $\log_{\frac{1}{5}} x = -3$;

г) $\log_x 8 = 3$; *д)* $\log_2(6 - x) = 3$; *е)* $\log_5(2x + 5) = 2$;

ж) $\log_x 49 = 2$; *з)* $\log_x \frac{1}{16} = -4$.

Бул мисалдарды чыгарууда логарималардын аныктамасын пайдаланабыз.

а) $\log_7 x = 2$; $x = 7^2$, $x = 49$.	*б)* $\log_3 x = 4$; $x = 3^4$, $x = 81$.
в) $\log_{\frac{1}{5}} x = -3$; $x = (\frac{1}{5})^{-3}$, $x = \frac{1}{(\frac{1}{5})^3} = \frac{1}{\frac{1}{125}}$, $x = 125$.	*г)* $\log_x 8 = 3$; $x^3 = 8$, $x = \sqrt[3]{8}$ $x = 2$.
д) $\log_2(6 - x) = 3$; $6 - x = 8$; $x = 6 - 8$; $x = -2$.	*е)* $\log_5(2x + 5) = 2$; $2x + 5 = 5^2$; $2x = 25 - 5$; $2x = 20$; $x = 20 : 2$; $x = 10$.
ж) $\log_x 49 = 2$; $x^2 = 49$, $x = \sqrt{49}$, $x = 7$.	*з)* $\log_x \frac{1}{16} = -4$. $x^{-4} = \frac{1}{16}$, $(\frac{1}{x})^4 = \frac{1}{16}$, $\frac{1}{x} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$,

	$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $x = 2$.

4-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $5^x = 7$; *б)* $3^{2x-5} = 6$;

в) $5^{2x} + 2 \cdot 5^x - 8 = 0$; *г)* $4^x - 5 \cdot 2^x - 6 = 0$.

Чыгаруу: а) $5^x = 7$; $\log_5 5^x = \log_5 7$, $x \cdot \log_5 5 = \log_5 7$, $x = \log_5 7$. *Жообу:* $x = \log_5 7$.	5 *негизи боюнча эки жагын тең логарифмалайбыз.*

Чыгаруу: б) $3^{2x-5} = 6$;

$\log_3 3^{2x-5} = \log_3 6$;

$(2x-5)\log_3 3 = \log_3 6$;

$2x - 5 = \log_3 6$;

$2x = \log_3 6 + 5$;

$x = \frac{1}{2}(\log_3 6 + 5)$;

Жообу: $x = \frac{1}{2}(\log_3 6 + 5)$.

Чыгаруу: в) $5^{2x} + 2 \cdot 5^x - 8 = 0$

$5^x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$t^2 + 2t - 8 = 0$,

$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$,

$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$,

$t_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$,

$t_2 = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$,

$5^x = 2$,

$\log_5 5^x = \log_5 2$,

$x\log_5 5 = \log_5 2$,

$x = \log_5 2$.

Жообу: $x = \log_5 2$.

Чыгаруу: г) $4^x - 5 \cdot 2^x - 6 = 0$.

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6 = 0$.

$2^{2x} = y$ *жаңы өзгөрмөнү киийребиз.*

2.4. Сандын логарифмасы.

Аныктама.

Негизи a болгон b санынын логарифмасы деп, b санын алуу үчүн a санын көтөрүүгө керек болгон даража көрсөткүч аталат. Мында $a \neq 1$ жана $a > 0,\ b > 0$.

Ал $\log_a b$, – a *негизи боюнча b санынын логарифмасы деп окулат.*

Мисал: $\log_2 8 = 3$, *анткени* $2^3 = 8$;

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$, *анткени* $3^{-2} = \frac{1}{9}$;

$\log_7 1 = 0$, *анткени* $7^0 = 1$.

Логарифманын аныктамасынан төмөнкүдөй барабардык жазууга болот.

$a^{\log_a b} = b$ *Бул барабардык негизги логарифмалык теңдештик деп аталат.*

Мисалы, $5^{\log_5 9} = 9$; $\frac{1}{2}^{\log_{\frac{1}{2}} 7} = 7$.

2.5. Логарифмалардын негизги касиеттери.

Ар кандай $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$ *жана n –анык сан үчүн төмөндөгүдөй барабардыктар орун алат.*

1^0. $\log_a 1 = 0$,

2^0. $\log_a a = 1$,

3^0. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$,

4^0. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

5^0. $\log_a b^n = n \log_a b$.

Бул барабардыктар логарифмалардын негизги касиеттери деп аталат.

Бир негизден экинчи негизге өтүү формуласы төмөнкүдөй болот.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Логарифмалар менен иштөөдө анын төмөнкү касиеттерин да эске алуу зарыл:

1. *Эгер* $a > 1$ жана $b > 1$ *болсо, анда* $log_a b > 0$, *ал эми* $0 < b < 1$ *болсо, анда* $log_a b < 0$ *болот.*
   Мисалы: $log_5 7 > 0$, $log_5 0{,}8 < 0$.
2. *Логарифманын негизи* $0 < a < 1$ *болгондо,* $b > 1$ *болсо,* $log_a b < 0$ *болот, ал эми* $0 < b < 1$ *болсо,* $log_a b > 0$ *болот.*
   Мисалы: $log_{0,2} 8 < 0$, $log_{0,2}\left(\frac{1}{5}\right) > 0$.
3. *Эгер* $a > 1$ *болсо, анда чоң санга чоң логарифма тура келет, б.а.* $b > c$ *болсо, анда* $log_a b > log_a c$ *болот.*
   Мисалы: $log_5 12 > log_5 9$.
4. *Эгер* $0 < a < 1$ *болсо, анда чоң санга кичине логарифма тура келет, б.а.* $b > c$ *болсо, анда* $log_a b < log_a c$ *болот.*
   Мисалы: $log_{\frac{1}{3}} 25 < log_{\frac{1}{3}} 12$.

1-мисал. Туюнтманын маанисин тапкыла.

а) $log_5 25$; *б)* $log_2 16$; *в)* $log_3 27$; *г)* $log_5 \frac{1}{25}$; *д)* $log_2 \frac{1}{8}$;

е) $log_3 \frac{1}{9}$; *ж)* $log_{0,5} 8$; *з)* $log_{\frac{1}{3}} 9$; *и)* $log_{\frac{1}{5}} 125$.

Бул мисалдарды чыгарууда логарифмалардын негизги касиеттерин пайдаланабыз:

Чыгаруу: а) $log_5 25 = log_5 5^2 = 2log_5 5 = 2 \cdot 1 = 2$;

б) $log_2 16 = log_2 2^4 = 4\, log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$;

в) $log_3 27 = log_3 3^3 = 3\, log_3 3 = 3 \cdot 1 = 3$;

г) $log_5 \frac{1}{25} = log_5 5^{-2} = -2\, log_5 5 = -2 \cdot 1 = -2$;

д) $log_2 \frac{1}{8} = log_2 2^{-3} = -3\, log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$;

е) $log_3 \frac{1}{9} = log_3 3^{-2} = -2\, log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$;

ж) $log_{0,5} 8 = log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3\, log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot 1 = -3$;

з) $log_{\frac{1}{3}} 9 = log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2\, log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = -2 \cdot 1 = -2$;

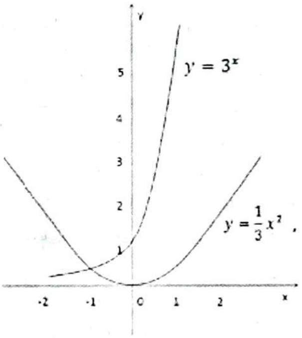
и) $log_{\frac{1}{5}} 125 = log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3\, log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = -3 \cdot 1 = -3$.

2-мисал. $a^{log_a b} = b$ *логарифмалык негизги теңдештигин пайдаланып, төмөнкү туюнтмалардын маанилерин тапкыла.*

демек, $x = 1$ *теңдеменин тамыры болот.*
Жообу: $x = 1$.
Чыгаруу:б) $3^x = \frac{1}{3}x^2$;
$y = 3^x$ *жана*
$y = \frac{1}{3}x^2$ *функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасына чийип алабыз.(22-сүрөт)*

Бул функциялардын графиктери $(-1;\frac{1}{3})$ *чекитинде кесилишти. Демек, теңдеменин тамыры* $x = -1$.

Жообу: $x = -1$.



22-сүрөт

2.2. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

31. Бирдей негизге келтирүү менен төмөнкү теңдемелерди чыгаргыла.

а) $27^{x-2} = 3^{2x-3}$, в) $(\frac{2}{3})^x \cdot (\frac{9}{8})^x = \frac{27}{64}$;

б) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; г) $(\frac{1}{5})^{4x^2+2x-1} = (\frac{\sqrt{5}}{5})^2$.

32. Төмөнкү теңдемелерди чыгаргла.

а) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$; в) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$;

б) $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$; г) $3 - 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.

33. Төмөнкү теңдемени жаңы өзгөрмө киийрүү жолу менен чыгаргыла:

а) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$; в) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 6$;

б) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$; г) $9^{\sqrt{x-1}} - 3^{\sqrt{x-1}} - 3^{\sqrt{x-1}} = 72$.

34. Теңдемелердин системаларын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ x - y = 1; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 56, \\ 2^y \cdot 7^{x-2} = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{3y-x} = \sqrt{3}, \\ 7^{x-2y+1} = 49; \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

35. Теңдемелерди графиктик жол менен чыгаргыла:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$ б) $2^x = x^2 + 1.$

2.3. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаруу.

Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгарууда a^x функциясынын касиеттерин пайдаланабыз. a^x функциясы $a > 1$ болгондо өсөт, $0 < a < 1$ болгондо кемийт.

Ушул касиет барабарсыздыктарды чыгарууда негиз болуп эсептелет.

1 – мисал. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $2^x > 16$; в) $0,2^x > \frac{1}{25}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{9}$; г) $\sqrt{7^x} > \sqrt[3]{49}$.

Чыгаруу: а) $2^x > 16$, $2^x > 2^4$ *түрүндө жазып алабыз.* $y = 2^x$ *функциясы* $2 > 1$ *болгондуктан өсүүчү.* $2^x > 2^4$ *барабарсыздыгы аткарылыш үчүн* $x > 4$ *болуш керек.*

Жообу: $(4; +\infty)$.

Чыгаруу: б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{9}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ *функциясында* $\frac{1}{3} < 1$ *болгондуктан бул функция кемүүчү болот.*

Демек, $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$ *аткарылыш үчүн* $x > 2$ *болот.*

Жообу: $(2; +\infty)$.

Чыгаруу: в) $(0,2)^x > \frac{1}{25}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^2$, $\frac{1}{5} < 1$ *болгондуктан* $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ *функциясы кемүүчү, ошондуктан* $\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^2$ *барабарсыздыгы аткарылыш үчүн* $x < 2$ *болот.*

Жообу: $(-\infty; 2)$.

Чыгаруу: г) $\sqrt{7^x} > \sqrt[3]{49}$, $7^{\frac{x}{2}} > 7^{\frac{2}{3}}$.

$7 > 1$ *болгондуктан* $7^{\frac{x}{2}} > 7^{\frac{2}{3}}$ *аткарылыш үчүн* $\frac{x}{2} > \frac{2}{3}$, $x > \frac{4}{3}$ *болуш керек.*

Жообу $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

2 - мисал. Барабарсыздыктарды чыгарыла:

а) $4x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$;

б) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \le 0$;

Чыгаруу: а)$4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0;$

$$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0.$$

$2^x = y$ *Жаңы өзгөрмөсүн киийребиз*

$$y^2 - 10y + 16 < 0.$$

$y^2 - 10y + 16 = 0$ *квадраттык теңдеменин тамырларын таап алабыз.*

Ал тамырлар $y_1 = 2, \ \ y_2 = 8$ *болот.*

Демек, $y_2 - 10y + 16 = (y-2)(y-8)$ *болот.*

$y = 2$ *жана* $y=8$ *сан огун* $(-\infty; 2)$, $(2; 8)$ *жана* $(8; +\infty)$ *аралыктарын бөлөт.*

23-сүрөт

Демек, $y^2 - 10y + 16 < 0$ *барабарсыздыгы* $2 < y < 8$ *болгондо аткарылат.*

$2^x = y$ *экендигин эске алсак* $2^1 < 2^x < 2^3$, $1 < x < 3$ *болот.*

Жообу: (1; 3)

Чыгаруу: б) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \le 0;$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 \le 0$, $\left(\frac{1}{6}\right)^x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$t^2 - 5t - 6 \le 0,$

$t^2 - 5t - 6 = 0$ *квадраттык теңдемесинин тамырлары*

$t_1 = 6$ *жана* $t_2 = -1$ *болот. Бул сандар сан огун төмөнкүдөй аралыктарга бөлөт.*

24-сүрөт

$(-\infty; -1)$, $(-1; 6)$ жана $(6; +\infty)$. *Бул аралыктардагы* $(t-6)(t+1)$ *көбөйтүндүсүнүн белгилери 24-сүрөттө көрсөтүлгөн.*

Демек, $-1 \le t \le 6$ *болот. Анда* $0 < \left(\frac{1}{6}\right)^x \le 6$ *же*

$0 < \left(\frac{1}{6}\right)^x \le \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ *демек,* $-1 \le x < +\infty$ *болот.*

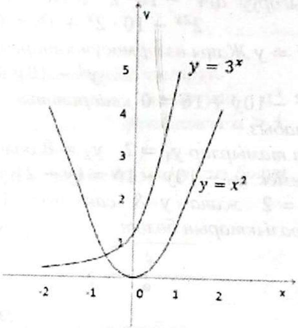
Жообу: $[-1; +\infty)$.

3-мисал. Барабарсыздыктарды график жолу менен чыгаргыла:

а) $3^x > x^2$; *б)* $\frac{1}{2^x} > 2 - x$.

Чыгаруу: а) $3^x > x^2$;

$y = 3^x$ *жана* $y = x^2$ *функцияларынын графиктерин чийип алабыз. Бул функциялардын графиктери абсциссасы* $x \approx -0.6$ *болгон чекитте кесилишээри чиймеден көрүнүп турат.*



25-сүрөт

$x \geq -0{,}6$ *дан чоң маанилерди алганда* 3^x *функциясынын маанилери* x^2 *функциясынын маанилеринен чоң болот. Демек,* $x \geq -0{,}6$ *аралыгы барабарсыздыктын чыгарылышы болуп эсептелет.*

Жообу: $[-0{,}6; +\infty)$.

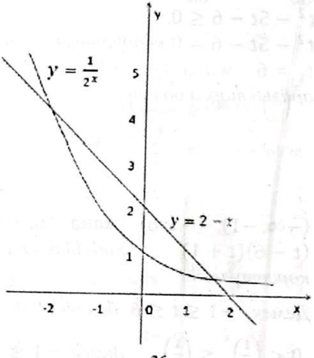
Чыгаруу: б) $\frac{1}{2^x} > 2 - x$,

$y = \frac{1}{2^x}$ *жана* $y = 2 - x$ *функцияларынын графиктерин чийип алабыз. (26-сүрөт)*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-2	0
$2 - x$	4	2

Функциялардын графиктери абсциссасы $x = -2$ *чекитинде кесилишти. Демек,* $x < -2$ *аралыгы барабарсыздыктын чыгарылышы болот. Ушул аралыкта* $\frac{1}{2^x}$ *функциясынын маанилери* $2 - x$ *функциясынын маанилеринен чоң болот.*



26-сүрөт

Жообу: $(-\infty; -2)$.

Чыгаруу: *Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгарууда, даражаларды бирдей негизге алып келүү, жаңы өзгөрмөнү киийрүү, системаларды чыгаруудагы кошуу жолу кеңири колдонулат.*

а) $\begin{cases} 3^{x-y} = 9, \\ 3^{x-2y-1} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{x-y} = 3^2, \\ 3^{x-2y-1} = 3^0; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 2, \\ x - 2y - 1 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 2, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ *Биринчи теңдемеден 2-теңдемени кемитебиз.*

$-\dfrac{\begin{matrix} x-y=2, \\ x-2y=1; \end{matrix}}{0+y=1}$ *у тин бул маанисин 1-теңдемеге коюп х ти табабыз.*

$x - 1 = 2, \; x = 2 + 1, \; x = 3.$

Жообу: $x = 3; \; y = 1.$

Чыгаруу: *б)* $\begin{cases} 5^{2x-y} = \sqrt{5}, \\ 2^{y+x-3} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{2x-y} = 5^{\frac{1}{2}}, \\ 2^{y+x-3} = 2^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - y = \frac{1}{2}, \\ y + x - 3 = -\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = \frac{1}{2}, \\ x + y = 2\frac{1}{2}; \end{cases}$ *кошуу жолун пайдаланабыз.*

$+\dfrac{\begin{matrix} 2x - y = \frac{1}{2}, \\ x + y = 2\frac{1}{2}; \end{matrix}}{3x + 0 = 3}$

$x = 3 : 3 = 1$

$x = 1$ *маанисин 1-теңдемеге коебуз.*

$2 \cdot 1 - y = \frac{1}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$

Жообу: $x = 1; \; y = 1\frac{1}{2}.$

в) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x = 3 - y; \end{cases}$ *системаларды чыгаруудагы ордуна коюу жолун колдонобуз.*

$2^{3-y} + 2^y = 6,$ *теңдеменин эки жагын тең* 2^y *ке көбөйтөбүз.*

$\frac{2^3}{2^y} + 2^y = 6,$

$2^3 + 2^y \cdot 2^y = 6 \cdot 2^y, \quad 8 + 2^{2y} - 6 \cdot 2^y = 0,$

$2^{2y} - 6 \cdot 2^y + 8 = 0, \quad 2^y = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$t^2 - 6t + 8 = 0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*

$D = 36 - 4 \cdot 8 = 4,$

$t_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}, \quad t_1 = 4; \; t_2 = 2.$

Демек, $2^y = 4$ жана $2^y = 2,$

$2^y = 2^2,$ $\qquad y=1.$

$y = 2.$

Бул маанилерди $x = 3 - y$ *теңдемесине коюп,* x *тин маанилерин табабыз.*

$x = 3 - 2 = 1, \quad x = 3 - 1 = 2.$

Жообу: (1;2) жана (2;1).

Чыгаруу: г) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7, \end{cases}$ $\quad 3^{\frac{x}{2}}=t, \quad 2^y = z$ *жаңы өзгөрмөлөрүн киийребиз.*

$\begin{cases} t^2 - z^2 = 77, \\ t - z = 7, \end{cases}$ $\quad t = 7 + z,$ $\quad t$ *нын бул маанисин 1-теңдемеге коебуз.* $\quad (7 + z)^2 - z^2 = 77,$

$49 + 14z + z^2 - z^2 = 77,$

$14z = 77 - 49,$

$14z = 28, \quad z = 28 : 14, \quad z = 2.$

$t = 7 + 2, \quad t = 9.$

Демек, $\quad 3^{\frac{x}{2}} = 9, \qquad 2^y = 2,$

$3^{\frac{x}{2}} = 3^2, \qquad 2^y = 2^1,$

$\frac{x}{2} = 2, \qquad y = 1.$

$x = 4.$

Жообу: $x = 4; \quad y = 1.$

5-мисал. Төмөнкү теңдемелерди графиктин жардамы ме-нен чыгаргыла:

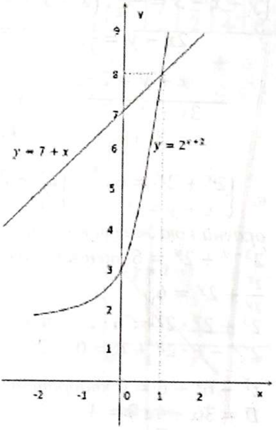
а) $2^{x+2} = 7 + x;$

б) $3^x = \frac{1}{3}x^2.$

Чыгаруу: а) $2^{x+2} = 7 + x,$

$y = 2^{x+2}$ жана $y = 7 + x$ *функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасына чийип алабыз.(21-сүрөт)* *Графиктердин абсциссасы теңдеменин тамыры болот.*

$y = 2^{x+2}$ жана $y = 7 + x$ *функцияларынын графиктери (1;8) чекитинде кесилишти,*



21-сүрөт

$10^x = 10^0$,

$x = 0$. *Жообу:* $x = 0$.

Чыгаруу: *г)* $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} = 56$,

$$5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{2^{\sqrt{x}}}{2} = 56,$$

$$2 \cdot 5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 112,$$

$$10 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 112,$$

$$7 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 112,$$

$$2^{\sqrt{x}} = 16,$$

$$2^{\sqrt{x}} = 2^4,$$

$$\sqrt{x} = 4, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 4^2, \quad x = 16.$$

Жообу: $x = 16$.

3. ***Жаңы өзгөрмөнү киргизүү жолу менен чыгаруу.***

3-мисал. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаргыла:

а) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; $4^x = 2^{2x}$ *деп өзгөртүп түзүп алабыз.*

$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$. $2^x = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киййребиз.*

$y^2 - 3y + 2 = 0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*

$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$,

$y_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$,

$y_1 = 2$; $y_2 = 1$. *Демек,* $2^x = 2$, $x = 1$;

$2^x = 1$, $x = 0$.

Жообу: $x = 1$ *жана* $x = 0$.

Чыгаруу: б) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$, $3^{\sqrt{x}} = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киййребиз.*

$y^2 - 4y + 3 = 0$ *квадраттык теңдемесин чыгарабыз.*

$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$,

$y_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$,

$y_1 = 3$; $y_2 = 1$. *Демек,* $3^{\sqrt{x}} = 3$ жана $3^{\sqrt{x}} = 1$ *теңдемелерин алабыз.*

$\sqrt{x} = 1$, $\sqrt{x} = 0$,

$x = 1$; $x = 0$.

Жообу: $x = 1$ *жана* $x = 0$.

Чыгаруу: в) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$,

$10 \cdot 10^{x^2} - \frac{10}{10^{x^2}} = 99$, *теңдеменин эки жагын тең* 10^{x^2} *ка*
$10 \cdot 10^{2x^2} - 10 = 99 \cdot 10^{x^2}$ *көбөйтөбүз.*

$10 \cdot 10^{2x^2} - 99 \cdot 10^{x^2} - 10 = 0$, $10^{x^2} = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$10y^2 - 99y - 10 = 0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*
$D = 99^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-10) = 9801 + 400 = 10201$,
$y_{1/2} = \frac{99 \pm \sqrt{10201}}{20} = \frac{99 \pm 101}{20}$,
$y_1 = 10$; $y_2 = -\frac{1}{10}$. *Демек,* $10^{x^2} = 10$, $x^2 = 1$,
$x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Жообу: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Чыгаруу: г) $25^{\sqrt{x-2}} - 5 \cdot 5^{\sqrt{x-2}} - 500 = 0$
$5^{2\sqrt{x-2}} - 5 \cdot 5^{\sqrt{x-2}} - 500 = 0$

$5^{\sqrt{x-2}} = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$y^2 - 5y - 500 = 0$
$D = 25 - 4 \cdot 500 = 25 + 2000 = 2025$,
$y_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{2025}}{2} = \frac{5 \pm 45}{2}$,
$y_1 = 25$; $y_2 = -20$.
Демек, $5^{\sqrt{x-2}} = 25$, $5^{\sqrt{x-2}} = -20$ *теңдемеси чыгарылышка ээ болбойт.*
$5^{\sqrt{x-2}} = 5^2$,
$\sqrt{x-2} = 2$,
$x - 2 = 4$,
$x = 6$. *Жообу:* $x = 6$.

4-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

а) $\begin{cases} 3^{x-y} = 9, \\ 3^{x-2y-1} = 1; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 5^{2x-y} = \sqrt{5}, \\ 2^{y+x-3} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$

$2^2 - 5y - 6 = 0,\ D = 25 + 24 = 49.$

$$y_1 = 6;\ y_2 = -1.$$

$2^x = 6, \quad log_2 2^x = log_2 6, \quad x = log_2 6$

Жообу: $x = log_2 6$.

5-мисал x *тин кайсы маанилеринде төмөнкү туюнтмалар мааниге ээ?*

а) $log_9(15 - x);$ в) $log_3(x^2 - 36);$

б) $log_5\left(\frac{5}{3x-2}\right);$ г) $log_{11}\frac{5-x}{2x+7}.$

Чыгаруу: а) $log_9(15 - x)$ *туюнтмасы* $15 - x > 0$ *болгондо гана мааниге ээ болот.*

$$-x > -15$$
$$x < 15.$$

Жообу: $x < 15$ *болгондо мааниге ээ.*

Чыгаруу: б) $log_5(\frac{5}{3x-2})$ *туюнтмасы качан* $3x - 2 > 0$ *болгондо мааниге ээ.*

$$3x > 2$$
$$x > \frac{2}{3}$$

Жообу: $x > \frac{2}{3}$ *болгондо мааниге ээ болот.*

Чыгаруу: в) $log_3(x^2 - 36),$

$$(x^2 - 36) > 0, \qquad (x-6)(x+6) > 0$$

$\begin{cases} x - 6 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases}, \begin{cases} x > 6 \\ x > -6 \end{cases},$ *демек* $x > 6$

2-учур. $\begin{cases} x - 6 < 0 \\ x + 6 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x < 6 \\ x < -6 \end{cases},$ *демек* $x < -6$

Жообу: $x > 6$ *жана* $x < -6.$

Чыгаруу: г) $log_4\frac{5-x}{2x+7};$

$\frac{5-x}{2x+7} > 0$ *болсо, жогорку туюнтма мааниге ээ болот.*

Ал төмөнкү барабарсыздыкка тең күчтүү.

$\begin{cases} 5 - x > 0 \\ 2x + 7 > 0 \end{cases}, \begin{cases} x < 5 \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases}, -\frac{7}{2} < x < 5,$

$\begin{cases} 5 - x < 0 \\ 2x + 7 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x > 5 \\ x < -\frac{7}{2} \end{cases}$ *бир учурда бул шарттар аткарылбайт.*

Жообу: $-\frac{7}{2} < x < 5$ *болгондо туюнтма мааниге ээ болот.*

6-мисал. Туюнтманын маанисин тапкыла.

а) $log_8 16 + log_8 4$;

б) $log_2 24 + log_2 \frac{1}{3}$;

в) $log_8 192 - log_2 3$;

г) $\frac{log_5 9}{log_5 81}$;

д) $\frac{log_5 54 - log_5 2}{log_5 9}$;

е) $log_{12} \sqrt[3]{144}$;

ж) $log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$;

з) $log_3 \sqrt[3]{9^7}$.

Эсептөөдө $1^o - 5^o$ *–касиеттер, формулалар колдонулат.*

Чыгаруу: а) $log_8 16 + log_8 4 = log_8(16 \cdot 4) = log_8 64 = 2$;

б) $log_2 24 + log_2 \frac{1}{3} = log_2(24 \cdot \frac{1}{3}) = log_2 8 = log_2 2^3 =$

$=3\, log_2 2 = 3$;

в) $log_8 192 - log_8 3 = log_8(192 : 3) = log_8 64 = 2$;

г) $\frac{log_5 9}{log_5 81} = \frac{log_5 3^2}{log_5 3^4} = \frac{2\, log_5 3}{4\, log_5 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

д) $\frac{log_5 54 - log_5 2}{log_5 9} = \frac{log_5(54:2)}{log_5 9} = \frac{log_5 27}{log_5 9} = \frac{log_5 3^3}{log_5 3^2} = \frac{3\, log_5 3}{2 log_5 3} = \frac{3}{2}$;

е) $log_{12} \sqrt[3]{144} = log_{12} \sqrt[3]{12^2} = \frac{2}{3} log_{12} 12 = \frac{2}{3}$;

ж) $log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}} = log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{2^7}} = log_2 \frac{1}{2^{\frac{7}{6}}} = log_2 2^{-\frac{7}{6}} = -\frac{7}{6} log_2 2 = -\frac{7}{6}$;

з) $log_3 \sqrt[3]{9^7} = log_3 \sqrt[3]{3^{14}} = log_3 3^{\frac{14}{3}} = \frac{14}{3} log_3 3 = \frac{14}{3}$.

7-мисал. x ти тапкыла:

а) $log_5 x = log_5 12{,}5 + log_5 10$;

б) $log_3 x = log_3 20 - log_3 4$;

в) $log_{0,2} x = 3\ log_{0,2} 3 - 2\ log_{0,2} 2$;

г) $log_7 x = 5\ log_7 a + 3\, log_7 b$.

Чыгаруу:

а) $log_5 x = log_5 12{,}5 + log_5 10 = log_5(12{,}5 \cdot 10) = log_5 125$,

$log_5 x = log_5 125$,

$x = 125$.

Жообу: $x = 125$

Барабардыктын эки жагынан тең Логарифманы алып таштайбыз.

Бул потенцирлөө деп аталат.

б) $log_3 x = log_3 20 - log_3 4 = log_3(20: 4) = log_3 5$,

Демек, $log_3 x = log_3 5$

$x = 5$.

Жообу: $x = 5$.

в) $log_{0,2}\, x = 3\ log_{0,2}\, 3 - 2\ log_{0,2}\, 2 = log_{0,2}\, 27 - log_{0,2} 4 =$

$= log_{0,2}\frac{27}{4}$; $x = \frac{27}{4}$. *Жообу:* $x = \frac{27}{4}$.

г) $log_7\, x = 5\ log_7\, a + 3\, log_7\, b = log_7\, a^5 + log_7\, b^3 = log_7\, a^5 \cdot b^3$.

Демек, $log_7\, x = log_7\, a^5 b^3$,

$x = a^5 b^3$.

Жообу: $x = a^5 b^3$.

2.4. – 2.5. Конүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

36. Эсептегиле:

а) $log_5\, 125$; *б)* $log_3\, 81$; *в)* $log_{0,5}\, 0{,}25$; *г)* $log_2\frac{1}{16}$;

д) $log_{\frac{1}{3}} 27$; *е)* $log_7\frac{1}{7}$; *ж)* $log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{32}$; *з)* $log_{\frac{1}{3}} 81$; *и)* $log_{0,5} 16$.

37. Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $2^{log_2\, 15}$; *б)* $7^{log_7 3}$; *в)* $5^{3 log_5\, 2}$;

г) $9^{log_3 8}$; *д)* $8^{log_2 5}$; *е)* $\frac{1}{2}6 log_{\frac{1}{2}}{}^2$.

38. x ти тапкыла:

а) $log_5 x = 3$; *б)* $log_3(2x + 1) = 4$; *в)* $log_{\frac{1}{3}} x = -2$;

г) $log_x 64 = 2$; *д)* $log_x \frac{1}{9} = 2$; *е)* $log_x \frac{1}{125} = -3$.

39. Теңдемени чыгаргыла:

а) $3^x = 5$; *б)* $2^{3x-1} = 7$;

в) $25^x = -4 \cdot 5^x - 5 = 0$; *г)* $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$.

40. x тин кандай маанисинде төмөнкү туюнтмалар мааниге ээ болот?

а) $log_5(14 - x)$; *б)* $log_{12}\left(\frac{7}{5x-4}\right)$;

в) $log_2(x^2 - 25)$; *г)* $log_4\ \frac{x-6}{3x-5}$.

41. Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $log_{9^{27}} + log 9^3$; *б)* $log_6 72 + log_6\frac{1}{2}$; *в)* $log_{14}\sqrt[3]{196}$;

г) $log_5 250 - log_{5^2}$; *д)* $log_3\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$; *е)* $log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{81}$;

ж) $\frac{log_2 9}{log_2 27}$; *з)* $\frac{log_7 81 - log_7 3}{log_7 9}$.

42. x ти тапкыла:

а) $log_7 x = log_7 31 + log_7 5$;   *б)* $log_2 x = log_2 120 - log_2 3$;
в) $log_5 x = 2\, log_5 7 + 3\, log_5 2$;   *г)* $log_x 25\sqrt{5} = -\frac{5}{8}$.

2.6. Ондук жана натуралдык логарифм.

Аныктама.

Сандын он негизи боюнча алынган логарифмасы, ондук логарифм деп аталат.

$log_{10}в$ *деп жазылбастан,* $lg\, b$ *деп белгиленет.*
Мисалы. $lg\, 75$; $lg100$; $lg0{,}001$, $lg2$.

Аныктама.

Негизи $\boldsymbol{e}$ *боюнча аныкталган логарифма, натуралдык логарифма деп аталат.* $(log_2 a = ln a)$
$ln a$ *- деп белгиленет. Мында* $\boldsymbol{e} = 2{,}7182 \ldots$ *иррационалдык сан.*

Ондук жана натуралдык логарифмалардын таблицалары менен каалагандай негиздеги логарифмаларды жеңил эсептөөгө болот.

Бир негиздеги логарифмадан башка негиздеги логарифмага өтүү формуласы бизге белгилүү
$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ *ушул формуланын негизинде каалагандай негиздеги логарифманы ондук жана натуралдык логарифм аркылуу туюндурууга болот.*

$$log_a b = \frac{lg\, b}{lg\, a}; \quad lg\, b = \frac{ln\, b}{ln\, 10};$$

$$log_a b = \frac{ln\, b}{ln\, a}; \quad ln\, b = \frac{lg\, b}{lg\, e}.$$

1-мисал. Сандардын ондук логарифмасын тапкыла.
а) $lg10$;   *б)* $lg10000$;   *в)* $lg0{,}1$;   *г)* $lg0{,}001$.
Чыгаруу:
а) $lg10 = 1$;
б) $lg10000 = lg10^4 = 4lg10 = 4$;
в) $lg0{,}1 = lg\frac{1}{10} = lg10^{-1} = -1 \cdot lg10 = -1$;
г) $lg0{,}001 = lg\frac{1}{1000} = lg10^{-3} = -3 \cdot lg10 = -3$.

Чыгарылган мисалга байкоо жүргүзсөңөр, ондун даражасынан турган сандардын ондук логарифмасын ооз эки эки эле тапса болот.
Мисалы. $lg100 = 2$, $lg10000 = 5$, $lg0{,}001 = -3$.

Каалагандай сандын ондук жана натуралдык логарифмаларын таблица жана калькулятордун жардамы менен жеңил эле табууга болот.

2-мисал. *Эгерде* $lg\,3 \approx 0{,}48$, $lg\,e \approx 0{,}43$ *''экендиги белгилүү болсо, төмөнкү логарифмаларды эсептегиле:*
а) $lg\,30$; *б)* $ln\,100$, *в)*$ln\,300$, *г)*$ln\,900$.
Чыгаруу: а) $lg\,30 = lg(3 \cdot 10) = lg\,3 + lg\,10 = 0{,}48 + 1 = 1{,}48$;
б) $ln\,100 = \frac{lg100}{lg\,e} = \frac{2}{0{,}43} \approx 4{,}65$;
в)$ln\,300 = \frac{lg300}{lg\,e} = \frac{lg(3 \cdot 100)}{lg\,e} = \frac{lg\,3 + lg\,100}{lg\,e} = \frac{0{,}48+2}{0{,}43} = 5{,}76$;
г)$ln\,900 = \frac{lg\,900}{lg\,e} = \frac{lg\,9 + lg\,100}{lg\,e} = \frac{lg\,3^2+2}{0{,}43} = \frac{2 \cdot lg\,3+2}{0{,}43} = \frac{2 \cdot 0{,}48+2}{0{,}43} = 6{,}88$;
3-мисал. $lg\,5 \approx 0{,}7$, $lg\,7 \approx 0{,}8$ *экендиги белгилүү болсо, төмөнкү логарифмаларды эсептегиле:*
а)$log_5 70$; *б)*$lg315$; *в)* $lg700$; *г)* $lg175$; *д)*$log_5 1000$; *е)* $log_5 10000$;
Чыгаруу: а)$log_5 70 = \frac{lg70}{lg5} = \frac{lg7+lg10}{lg5} = \frac{0{,}8+1}{0{,}7} = \frac{1{,}8}{0{,}7} \approx 3{,}7$;
б)$lg315 = lg(3^2 \cdot 5 \cdot 7) = lg3^2 + lg5 + lg7 = 2 \cdot lg3 + 0{,}7 + 0{,}8 = \;\; = 2 \cdot 0{,}48 + 1{,}5 = 0{,}96 + 1{,}5 = 2{,}46$;
в) $lg700 = lg(7 \cdot 100) = lg7 + lg100 = 0{,}8 + 2 = 2{,}8$;
г)$lg175 = lg(5^2 \cdot 7) = lg5^2 + lg7 = 2 \cdot lg5 + 0{,}8 = 2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 = 2{,}2$;
д)$log_5 1000 = \frac{lg1000}{lg5} = \frac{3}{0{,}7} \approx 4{,}49$;
е) $log_5 10000 = \frac{lg10000}{lg5} = \frac{4}{0{,}7} \approx 5{,}71$.

2.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

Айрым сандардын ондук жана натуралдык логарифмдеринин таблицадагы маанилери берилди.

Аларды көнүгүүлөрдү аткарууда пайдалангыла.

$lg2 \approx 0{,}301$; $lg3 \approx 0{,}4771$; $lg5 \approx 0{,}699$; $lg7 \approx 0{,}8451$;
$lge \approx 0{,}4343$; $ln2 \approx 0{,}6931$; $ln3 \approx 1{,}0986$; $ln7 \approx 1{,}9459$;
$ln5 \approx 1{,}6094$; $ln10 \approx 2{,}3255$.

43. Төмөнкү ондук логарифмаларды тапкыла.
а) $lg100$; *б)* $lg0{,}01$; *в)* $lg40$; *г)* $lg\frac{2}{3}$; *д)* $lg147$; *е)* $lg210$.

44. Натуралдык логарифмдерди тапкыла.
а) $ln6$; *б)* $ln70$; *в)* $ln105$; *г)* $ln1000$; *д)* $ln300$; *е)* $ln1750$.

45. 3 негизи боюнча логарифмалагыла.

а) $(\sqrt[3]{a^2b})^{\frac{3}{5}}$; *б)* $(\frac{a^8}{\sqrt[5]{b^4}})^{-4}$.

46. 10 негизги боюнча логорифмалагыла.

а) $1000\sqrt{a^3b^5c}$; *б)* $\frac{b^{\frac{3}{5}}}{10^3a^5c^4}$.

2. 7. Логорифмалык функциянын касиеттери жана графиги.

Аныктама.

$y = log_a x$ *түрүндөгү функция логарифмалык функция деп аталат. Мында* $a > 0$ *жана* $a \neq 1$.

Бул функция төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1. Логарифмалык функциянын аныкталуу областыбардык оң сандардын көптүгү, башкача айтканда $D(loga) = R+$.

2. Логарифмалык функциянын маанилеринин көптүгү анык сандар, башкача айтканда. $E(loga) = R$.

3. Логорифмалык функция бардык аныкталуу областында $a > 1$ *болгондо өсөт,* $0 < a < 1$ *болгондо кемүүчү болот.*

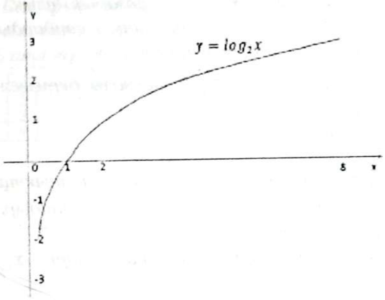
4. Эгер $a > 1$ *болсо, анда* $y = log_{a^x}$ *функциясы* $x > 1$ *болгондо, оң маанилерди алат, ал эми* $0 < x < 1$ *болгондо терс маанилерди алат.*

Эгер $0 < a < 1$ *болсо, анда* $y = log_a x$ *функциясы,* $0 < x < 1$ *болгондо оң, ал эми* $x > 1$ *болгондо терс маанини алат.*

1- мисал. $y = log_2 x$ *функциясынын графигин чийгиле.*

Таблица түзөбүз.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	*1*	*2*	*4*	*8*
$log_2 x$	-2	-1	*0*	*1*	*2*	*3*



27-сүрөт

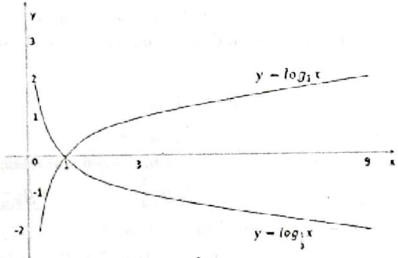
2-мисал. Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын табкыла, графиктерин түзгүлө.

$y = log_3x$ *жана* $y = log_{\frac{1}{3}}x$.

Чыгаруу: Бул функциялардын аныкталуу областы:

$D(log_2x) = R +$, $D\left(log_{\frac{1}{3}}x\right) = R +$ *бардык оң анык сандар.*

Графиктери 28-сүрөттө көрсөтүлгөн. Графиктен $y = log_3x$ *функциясы өсүүчү, (себеби a>1 б.а. 3>1)* $y = log_{\frac{1}{3}}x$ *функциясы кемүүчү экендиги көрүнүп турат.*



28-сүрөт

3-мисал. Функциялардын аныкталуу областын табкыла.

а) $y = log_5(3x - 7)$, *б)* $y = log_{0,3}(x^2 + x - 6)$.

Чыгаруу: а) $y = log_5(3x - 7)$, *логарифмалык функциянын аныкталуу областы бардык оң сандардын көптүгү болгондуктан* $3x - 7 > 0$, *болуш керек.*

$3x > 7$, $x > \frac{7}{3}$, *демек* $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$ *интервалы берилген функциянын аныкталуу областы болот.*

Жообу: $D(y) = \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

б) $y = log_{0,3}(x^2 + x - 6)$, *бул функциянын аныкталуу областы* $x^2 + x - 6 > 0$ *барабарсыздыгын канаатандырган* x *тин маанилери үчүн аныкталган.*

$x^2 + x - 6 = 0$ *бул теңдеменин тамырлары* $x_1 = -3$ *жана* $x_2 = 2$.

Бул сандар сан огун төмөнкүдөй интервалдарга бөлөт.

$(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; +\infty)$

29-сүрөт

Демек, $(-\infty; -3)$ *жана* $(2; +\infty)$ *интервалдарында барабарсыздык орундалат.*

Жообу: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

4-мисал. Сандарды салыштыргыла.

а) $log_5 \frac{7}{3}$ *жана* $log_5 \frac{3}{7}$; *б)* $log \frac{1}{3}^{l}$ *жана* $log \frac{1}{3}^{\pi}$;

в) $log_{7^{15}}$ *жана* $log_{8^{15}}$; *г)* $log_{0,5^9}$ *жана* $log_{0,7^9}$;

Чыгаруу: а) Логарифмалык функциянын $3 - 4$ *–касиеттерин колдонобуз.*

а) $log_5 \frac{7}{3} > log_5 \frac{3}{7}$; *б)* $log \frac{1}{3}^{l} > log \frac{1}{3}^{\pi}$;

в) $log_{7^{15}} > log_{8^{15}}$; *г)* $log_{0,5^9} < log_{0,7^9}$;

5- мисал. Сандардын оң, терс экендигин аныктагыла.

а) $log_7 12$; *б)* $log_{0,7} 17$; *в)* $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$; *г)* $log_5 \frac{1}{3}$.

Чыгаруу: $3 - 4$ *– касиеттерди колдонобуз.*

а) $log_7 12 > 0$; *б)* $log_{0,7} 17 < 0$; *в)* $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} > 0$; *г)* $log_5 \frac{1}{3} < 0$.

6 - мисал. Функциялардын графигин түзгүлө.

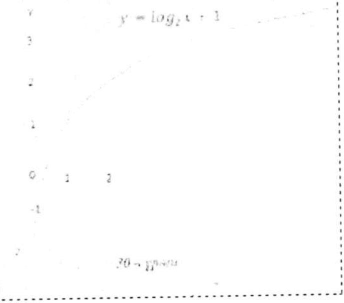
а) $y = log_2 x + 1$; *б)* $y = log_2(x + 1)$;

в) $y = log_2(x - 1)$; *г)* $y = log_2 x - 1$.

Чыгаруу: Бул функциялардын графигин түзүү үчүн, x тин эсептөөгө ыңгайлуу маанилерин тандап алып, ар бир функцияга өзүнчө таблица түзөбүз.

а) $y = log_2 x + 1$;

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3	4



30 – сүрөт

б) $y = log_2(x + 1)$;

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	7
y	-1	0	1	2	3

31-сүрөт

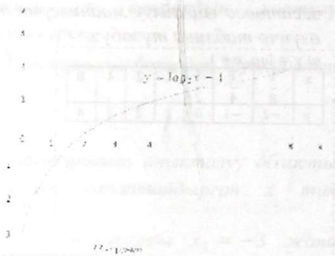
в) $y = log_2(x - 1)$

x	$1\frac{1}{2}$	2	3	5	9
y	-1	0	1	2	3

32-сүрөт

г) $y = log_2 x - 1$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2



2.7. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

47. Функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = log_7(2x - 5)$; *б)* $y = log_{0,8}(x^2 - 3x - 10)$.

48. Сандарды салыштыргыла:

а) $y = log_7 \frac{2}{5}$ *жана* $y = log_7 \frac{5}{2}$;

б) $y = log_{\frac{1}{5}} 10$ *жана* $y = log_{\frac{1}{5}} 3$;

в) $y = log_{5^{20}}$ *жана* $y = log_{7^{20}}$;

г) $y = log_{0,2^{8}}$ *жана* $y = log_{0,6^{8}}$.

49. Сандардын оң же терс экендигин аныктагыла:

а) $log_9 15$; *б)* $y = log_{0.3} 25$; *в)* $y = log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$; *г)* $y = log_7 \frac{1}{5}$;

2.8. Логорифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар. Аныктама.

Белгисиз өзгөрмөнү логорифма белгисине камтыган теңдеме логарифмалык теңдеме деп аталат. Эң жөнөкөй логарифмалык теңдеме.

$log_{a^x} = b$ *түрүндө берилет.*

Мында $a > 0$ *жана* $a \neq 1$ *болот.*

Мисалы, $log_{5^x} = 2$; $log_7(x + 3) = 5$; $log_{\sqrt{x}}(x^2 - 3) = 2$.

Логарифмалык теңдемелер, логарифманын аныктамасын, касиеттерин пайдаланып, тең күчтүү теңдемелерге өзгөртүп түзүү жолдору менен чыгарылат. Логарифмалык теңдемелерди чыгарууда тамырларды жоготуп *жибербей, чет тамырлар пайда болбогондой өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүү зарыл.*

1) Логарифманын аныктамасынын негизинде логарифмалык теңдемелерди чыгаруу.

1-мисал. Төмөнкү логарифмалык теңдемелерди чыгаргыла:

а) $log_2(3x-4)=3$; в) $log_x(x^4+3x-15)=4$;

б) $log_7(x^2+13)=2$; г) $log_3\, lg_3(x^2-2x+24)=1$.

Чыгаруу: Логарифманын аныктамасы боюнча $log_a x=b$, $x=a^b$ *болот.*

а) $log_2(3x-4)=3$,

$3x-4=2^3$,

$3x=8+4$,

$x=12:3$,

$x=4$.

Жообу: $x=4$.

в) $log_x(x^4+3x-15)=4$,

$x^4+3x-15=x^4$,

$3x-15=0$,

$3x=15$,

$x=15:3$,

$x=5$. *Жообу:* $x=5$.

б) $log_7(x^2+13)=2$;

$x^2+13=7^2$,

$x^2=49-13$,

$x^2=36$,

$x_{1/2}=\pm\sqrt{36}$,

$x_1=6,\ \ x_2=-6$.

Жообу: $x_1=6,\ \ x_2=-6$.

г) $log_3 log_3(x^2-2x+24)=1$;

$log_3(x^2-2x+24)=3^1$,

$x^2-2x+24=3^3$,

$x^2-2x+24-27=0$,

$x^2-2x-3=0$,

$D=4-4\cdot(-3)=4+12=16$,

$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$,

$x_1=\frac{2+4}{2}=3,\ \ x_2=\frac{2-4}{2}=-1$.

Жообу: $x_1=3;\ \ x_2=-1$.

2) Логорифмалык теңдемелерди потенцирлоо ыкмасы менен чыгаруу.

2 –мисал. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $log_7(5x-12)=\ log_7(2x+3)$;

б) $log_2(x+3)+\ log_2(x+2)=\ log_2(x^2+21)$;

в) $log_4(3x^2+7)-\ log_4(x+1)=\ log_4(2x+3)$;

г) $lg_7(x+6)-\frac{1}{2}lg(2x-3)=2-lg25$.

Чыгаруу: Бул теңдемелерди көбөйтүндүнүн, тийиндинин, даражанын логарифмаларынын касиеттерин колдонуу менен потенцирлөө ыкмасын пайдаланып чыгарабыз.

а) $log_7(5x-12) = log_7(2x+3)$, *потенцирлейбиз.*

$$5x-12 = 2x+3,$$
$$5x-2x = 3+12,$$
$$3x = 15,$$
$$x = 15:3$$
$$x = 5.$$

Жообу: $x = 5$.

б) Чыгаруу: $log_2(x+3) + log_2(x+2) = log_2(x^2+21)$

$log_2(x+3)(x+2) = log_2(x^2+21)$. *потенцирлейбиз.*

$$(x+3)(x+2) = x^2+21,$$
$$x^2+5x+6 = x^2+21,$$
$$x^2+5x-x^2 = 21-6,$$
$$5x = 15,$$

$x = 15:3,\ x = 3.$ Жообу: $x = 3$.

в) Чыгаруу: $log_4(3x^2+7) - log_4(x+1) = log_4(2x+3)$

$log_4\frac{3x^2+7}{x+1} = log_4(2x+3)$ *потенцирлейбиз.*

$$\frac{3x^2+7}{x+1} = 2x+3,$$
$$3x^2+7 = (x+1)(2x+3),$$
$$3x^2+7 = 2x^2+3x+2x+3,$$
$$3x^2+7-2x^2-5x-3 = 0,$$
$$x^2-5x+4 = 0,$$
$$D - 25 - 4\cdot 4 = 25-16 = 9,$$
$$x_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm 3}{2},$$
$$x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4,\ x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

Жообу: $x_1 = 4;\ x_2 = 1$.

г) Чыгаруу: $lg\ (x+6) - \frac{1}{2}lg(2x-3) = 2 - lg25$,

$lg\ (x+6) - lg(2x-3)^{\frac{1}{2}} = lg100 - lg25$,

$lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = lg\frac{100}{25}$,

$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = 4$,

$x+6 = 4\cdot\sqrt{2x-3}$, *теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$(x+6)^2 = (4\sqrt{2x-3})^2$,
$x^2 + 12x + 36 = 16 \cdot (2x - 3)$,
$x^2 + 12x + 36 = 32x - 48$,
$x^2 - 20x + 84 = 0$,
$D = 400 - 4 \cdot 84 = 400 - 336 = 64$,
$x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2}$,
$x_{1/2} = \frac{20+8}{2} = \frac{28}{2} = 14, x_2 = \frac{20-8}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Жообу: $x_1 = 14,\ x_2 = 6$.

3) Квадраттык теңдемеге келтирилип, чыгаруулучу логарифмалык теңдемелерди чыгаруу.

3 – мисал.
а) $log_2^2 x - 3log_2 x - 4 = 0$; *б)* $lgx(lgx + 3) + 2 = 0$;
в) $2log_3^2 x + 5log_3 x + 3 = 0$; *г)* $log_5^2 x - 5 = log_5 x^4$;

Чыгаруу: а) $log_2^2 x - 3log_2 x - 4 = 0$.
$log_2 x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киймребиз.*
$t^2 - 3t - 4 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*
$D = 9 - 4 \cdot (-4) = 25$,
$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$;
$t_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $t_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.
Демек, $log_2 x = 4$ *жана* $log_2 x = -1$ *болот.*
$x = 2^4 = 16$, $x = 2^{-1}$,
$x = 16$. $x = \frac{1}{2}$.

Жообу: $x_1 = 16$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Чыгаруу: б) $lgx(lgx + 3) + 2 = 0$
$lg^2 x + 3lgx + 2 = 0$
$lgx = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киймребиз.*
$y^2 + 3y + 2 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*
$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$,
$y_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$,
$y_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$; $y_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Демек, $lgx = -1$ *жана* $lgx = -2$

$x = 10^{-1}$; $\quad x = 10^{-2}$

$x = \frac{1}{10}$; $\quad x = \frac{1}{100}$

Жообу: $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = \frac{1}{100}$.

в) Чыгаруу: $2log_3^2x + 5log_3x + 3 = 0$;

$log_3x = y$ *жаңы өзгөрмөрсүн кийиребиз.*

$2y^2 - 5y + 3 = 0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

$y_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{4} = \frac{5\pm1}{4}$; $\quad y_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $\quad y_2 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

Демек, $log_3x = \frac{3}{2}$ *жана* $log_3x = 1$,

$x = 3^{\frac{3}{2}}$; $\quad x = 3^1$,

$x = 3$.

$x = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$,

Жообу: $x_1 = 3\sqrt{3}$, $x_2 = 3$

г) Чыгаруу: $\quad log_5^2x - 5 = log_5x$

$log^2{}_5\,x - 4\,log_5x - 5 = 0$

$log_5\,x = t$ *жаңы өзгөрмөнүн киййребиз.*

$t^2 - 4t - 5 = 0$,

$D = 16 + 4 \cdot 5 = 36$,

$$t_{1/2} = \frac{4\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{4\pm6}{2};\ t_1 = \frac{4+6}{2} = 5;\ t_2 = \frac{4-6}{2} = -1;$$

Демек, $log_5\,x = 5$ *жана* $log_5\,x = -1$

$x = 5^5$ $\quad x = 5^{-1}$

$x = 3125$; $\quad x = \frac{1}{5}$

Жообу: $x_1 = 3125$; $\quad x_2 = \frac{1}{5}$.

4) Бирдей негизге келтирүү жолу менен чыгарылуучу логарифмалык теңдемелер.

Мындай теңдемелерди чыгарууда, бир негиздеги логарифмага өтүү формуласы, б.а. $log_a\,b = \frac{log_c\,b}{log_c\,a}$ *формуласы колдонулат.*

4-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $\log_8 x - \log_4 x + \log_2 x = 5;$ *б)* $lg_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3;$

в) $\log_x(3x^2) \cdot \log^2{}_3 x = 1;$ г) $\log_x 16 + 4 \cdot \log_{16} x = 2\log_2 x.$

Чыгаруу:

а) $\log_8 x - \log_4 x + \log_2 x = 5;$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 8} - \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 5$$

$$\frac{\log_2 x}{3} - \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 5,$$

$$2\log_2 x - 3\log_2 x + 6\log_2 x = 30,$$

$$5\log_2 x = 30,$$

$$\log_2 x = 30:5,$$

$$\log_2 x = 6,$$

$$x = 2^6,$$

$$x = 64.$$

Жообу: $x = 64.$

Теңдемедеги логарималарды бирдей негизге алып келебиз, теңдеменин эки жагын тең 6га көбөйтөбүз.

б) Чыгаруу: $lg_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3,$

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3,$$

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2^2 + \log_2 x} = 3$$

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3$$

Теңдемедеги 16 жана 64 сандары 2 нин даражалары болгондуктан, логарифмаларды 2 негизине өзгөртүп түзүү ыңгайлуу.
Теңдеменин эки жагын тең $2\log_2 x \cdot (1 + \log_2 x)$ *ке көбөйтөбүз.*

$$4(1 + \log_2 x) + 12\log_2 x = 3 \cdot 2\log_2 x(1 + \log_2 x),$$

$$4 + 4\log_2 x + 12\log_2 x = 6\log_2 x + 6\log_2^2 x,$$

$$-6\log_2^2 x + 10\log_2 x + 4 = 0$$ *(-2 ге бөлөбүз)*

$$3\log_2^2 x - 5\log_2 x - 2 = 0$$

$t = \log_2 x$ *өзгөрмөсүн киийребиз.*

$3t^2 - 5t - 2 = 0; \quad t_1 = 2, \; t_2 = -\frac{1}{3}.$

Демек, $log_2 x = 2$ *жана* $log_2 x = -\frac{1}{3}$

$x = 2^2 \qquad\qquad x = 2^{-\frac{1}{3}}$

$x = 4. \qquad\qquad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Жообу: $x_1 = 4; \quad x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$

в) Чыгаруу: $log_x(3x^2) \cdot log^2{}_3 x = 1,$ *теңдемедеги* $log_x(3x^2)$ *логарифмасын негизи 3 болгон логарифмага өзгөртүп түзөбүз.*

$\frac{log_3(3x^2)}{log_3 x} \cdot log^2{}_3 x = 1$ *бөлчөктү* $log_3 x$ *ке кыскартабыз.*

$log_3(3x^2) \cdot log_3 x = 1,$

$(log_3 3 + log_3 x^2) \cdot log_3 x = 1,$

$(1 + 2\, log_3 x) \cdot log_3 x = 1,$

$log_3 x + 2log_3^2 x - 1 = 0,$

$log_3 x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$$2t^2 + t - 1 = 0, \quad D = 1 + 8 = 9.$$

$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \quad t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}; \quad t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$

Демек, $log_3 x = \frac{1}{2}$ *жана* $log_3 x = -1$

$x = 3^{\frac{1}{2}}, \qquad\qquad log_3 x = -1,$

$x = \sqrt{3}; \qquad\qquad x = 3^{-1}, \quad x = \frac{1}{3}.$

Жообу: $x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}.$

г) Чыгаруу: $log_x 16 + 4 \cdot log_{16} x = 2\, log_2 x.$

$$\frac{log_2 16}{log_2 x} + \frac{4 log_2 x}{log_2 16} = 2 log_2 x,$$

$$\frac{4}{log_2 x} + \frac{4 log_2 x}{4} = 2 log_2 x,$$

$$16 + 4log_2^2 x - 8log_2^2 x = 0,$$

$$-log_2^2 x = -4,$$

$$log_2^2 x = 4,$$

$$log_2 x = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$$

Демек, $log_2 x = 2$ *жана* $log_2 x = -2$

$x = 2^2, \qquad\qquad x = 2^{-2}$

$x = 4; \qquad\qquad x = \frac{1}{4}.$

5) Эки жагын тең логарифмалоо жолу менен чыгарылуучу теңдемелер.

5 –мисал. Төмөнкү теңдемелерди чыгаргыла.

а) $x^{\log_5 x} = 5$; б) $x^{\log_3 x+2} = 27$;

в) $x^{2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{9}$; г) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$.

а) Чыгаруу: $x^{\log_5 x} = 5$;

$$\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 5,$$

$$\log_5 x \cdot \log_5 x = 1,$$

$$\log_5^2 x = 1,$$

$$\log_5 x = \pm\sqrt{1} = \pm 1,$$

Демек, $\log_5 x = 1$ жана $\log_5 x = -1$,

$x = 5$, $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

Жообу: $x = 5$, $x = \frac{1}{5}$.

б) Чыгаруу: $x^{\log_3 x+2} = 27$;

$$\log_3 x^{\log_3 x+2} = \log_3 27,$$

$$(\log_3 x + 2)\log_3 x = 3,$$

$$\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 = 0,$$

$\log_3 x = t$ жаңы өзгөрмөнү киийребиз

$$t^2 + 2t - 3 = 0, \quad D = 4 + 4 \cdot 3 = 16.$$

$$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -3$$

Демек, $\log_3 x = 1$ жана $\log_3 x = -3$

$x = 3^1$, $x = 3^{-3}$

$x = 3$; $x = \frac{1}{27}$. Жообу: $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{27}$.

в) Чыгаруу: $x^{2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{9}$;

$$\log_{\frac{1}{3}} x^{2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9},$$

$$\left(2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x\right)\log_{\frac{1}{3}} x = 2,$$

$$2\log_{\frac{1}{3}} x - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 2 = 0,$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4\log_{\frac{1}{3}} x + 4 = 0,$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ жаңы өзгөрмөнү киийребиз

$$t^2 - 4t + 4 = 0, \quad D = 16 - 4 \cdot 4 = 0.$$

$$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2}; \quad t_1 = 2;$$

Демек, $log_{\frac{1}{3}} x = 2$

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^2, \quad x = \frac{1}{9}. \qquad \text{Жообу: } x = \frac{1}{9}.$$

г) Чыгаруу: $2^{3lgx} \cdot 5^{lgx} = 1600.$

$$log_2(2^{3lgx} \cdot 5^{lgx}) = log_2 1600,$$
$$log_2 2^{3lgx} + log_2 5^{lgx} = log_2 40^2,$$
$$3lgx \cdot log_2 2 + lgx \cdot log_2 5 = 2log_2 40,$$
$$3lgx \quad + lgx \cdot log_2 5 = 2log_2 40,$$
$$lgx(3 + log_2 5) = 2log_2 40,$$

$3 + log_2 5$ *туюнтмасын өзгөртүп түзөбүз.*

$3 + log_2 5 = log_2 8 + log_2 5 = log_2 8 \cdot 5 = log_2 40$ *бул маанини теңдемеге коебуз.*

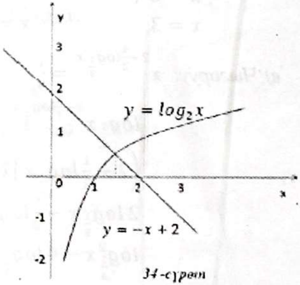
$$lgx \cdot log_2 40 = 2log_2 40,$$
$$lgx = \frac{2log_2 40}{log_2 40} = 2,$$
$$lgx = 2,$$
$$x = 10^2 = 100. \quad \text{Жообу: } x = 100.$$

6) Логарифмалык теңдемелерди графиктик жол менен чыгаруу.

а) $log_2 x + x - 2 = 0;$ *б)* $log_{\frac{1}{2}} x = x + 3.$

Чыгаруу: а) $log_2 x + x - 2 = 0;$

$log_2 x = -x + 2$ *бул теңдеменин оң жана сол жактарын* $y = log_2 x$ *жана* $y = -x + 2$ *функциялары түрүндө жазып алабыз. Алардын графиктерин бир эле координаталар системасына чийебиз.*



34-сүрөт

Графиктердин кесилишкен чекитинин абсциссасы теңдеменин тамыры болот.

Графиктер абсциссасы

1,5 чекитинде кесилишти. Демек, теңдеменин тамыры $x \approx 1{,}5$ *болот.*

Жообу: $x = 1{,}5$.

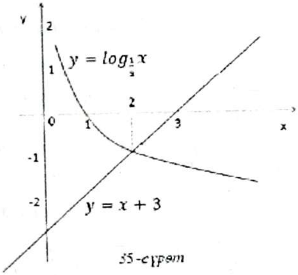
Чыгаруу:

б) $log_{\frac{1}{2}}x = x + 3$.

$y = log_{\frac{1}{2}}x, \quad y = x + 3$.

Функциялардын графиктери абсциссасы $x = 2$ *чекитинде кесилишти. Демек, теңдеменин тамыры* $x = 2$ *болот.*

Жообу: $x = 2$.



55-сүрөт

2.9. Логарифмалык барабарсыздыктар.

Аныктама.

Өзгөрмө логарифма белгисине гана камтылган барабарсыздык логарифмалык барабарсыздык деп аталат.

Мисалы, $log_a f(x) > log_a g(x)$, $\quad log_a f(x) < log_a g(x)$.

Мында – $a > 0$ *жана* $a \neq 1$.

Логарифмалык барабарсыздыктарды чыгарууда, логарифмалардын касиетин, логарифмалык функциялардын касиеттерин жана барабарсыздыктардын касиеттерин өз орду менен пайдалануу зарыл.

Эң жөнөкөй логарифмалык барабарсыздыктарды чыгарып көрөлү.

Мисалы, $log_2 x > 3$, $\quad$ *3 тү логорифма түрүндө жазып*

$log_2 x > log_2 8$ $\quad$ *алабыз.*

$log_2 x$ *функциясы өсүүчү, себеби логорифма негизи* $2 > 1$ *ден.*

Ошондуктан $log_2 x > log_2 8$ *барабарсыздыгы* $x > 8$ *болгондо гана аткарылат.*

Жообу: $x > 8$.

Мисал. $log_{\frac{1}{3}}x > -2$ *барабарсыздыктын оң жагын*

$log_{\frac{1}{3}}x > log_{\frac{1}{3}}9$ *логорифма аркылуу*

туюнтуп алабыз.

Логарифмалык функицянын аныкталуу областы оң сандар гана болгондуктан $x > 0$ *болот, берилген логарифманын негизи* $\frac{1}{3} < 1$ *болгондуктан* $log_{\frac{1}{3}}x$ *функциясы кемүүчү болот.*

Демек, $x < 9$ *болот, башкача айтканда барабарсыздык* $\begin{cases} x > 0 \\ x < 9 \end{cases}$ *системасына тең күчтүү болот.*

Мындан $0 < x < 9$ *келип чыгат.*

Жообу: $0 < x < 9$

1 – мисал. Барабарсыздыктарды чыгаргыла.

а) $log_3(4x-5) > 1$; *б)* $log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > -2$;

в) $log_2(x^2 - x - 12) < 3$; *г)* $lg(x-3) > 1 - lg2$.

Чыгаруу: а) $log_3(4x-5) > 1$.

$log_3(4x-5) > 1$. *Логарифманын негизи* $3 > 1$ *болгондуктан* $log_3(4x-5)$ *функциясы өсүүчү, ошондуктан берилген барабарсыздык* $4x - 5 > 3$ *барабарсыздыгы менен тең күчтүү.*

$$\begin{cases} 4x - 5 > 0 \\ 4x - 5 > 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{5}{4} \\ x > \frac{8}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1\frac{1}{4} \\ x > 2 \end{cases}.$$

Жообу: $x > 2$.

Чыгаруу: б) $log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > -2$;

$log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > log_{\frac{1}{2}}4$ *логарифманын негизи* $\frac{1}{2} < 1$ *болгондуктан* $log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$ *кемүүчү функция болот. Ошондуктан берилген барабарсыздык* $\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 3x - 2 < 4 \end{cases}$ *барабарсыздыгына тең кемүүчү.*

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 3x - 2 < 4' \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 2 \\ 3x < 6' \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < 2 \end{cases},$$

Демек, $\frac{2}{3} < x < 2$ *болот.*

Жообу: $\frac{2}{3} < x < 2$.

Чыгаруу: в) $log_2(x^2 - x - 12) < 3$

$log_2(x^2 - x - 12) < log_2 8$ *логарифманын негизи* $2 > 1$ *болгондуктан* $log_2(x^2 - x - 12)$ *функциясы өсүүчү болот.*

Ошондуктан берилген барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктар системасына тең күчтүү.

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0 \\ x^2 - x - 12 < 8, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+3)(x-4) > 0 \\ (x-5)(x+4) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-4 > 0 \\ x+4 > 0 \\ x-5 < 0, \end{cases} \begin{cases} x > -3 \\ x > 4 \\ x > -4 \\ x < 5, \end{cases}$$ *Демек,* $4 < x < 5$ *болот.*

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x-4 < 0 \\ x+4 < 0 \\ x-5 > 0, \end{cases} \begin{cases} x < -3 \\ x < 4 \\ x < -4 \\ x > 5, \end{cases} \begin{cases} x < -3 \\ x > 5, \end{cases}$$ *бул барабарсыздык, жогорку барабарсыздыктын чыгарылышына карама-каршы келет. Ошондуктан барабарсыздыктын чыгарылышы* $4 < x < 5$ *болот.*

Жообу: $4 < x < 5$.

Чыгаруу: г) $lg(x-3) > 1 - lg2$.

$lg(x-3) > lg10 - lg2$,

$lg(x-3) > lg\frac{10}{2}$,

$lg(x-3) > lg5$,

$x - 3 > 5, \quad x > 5+3$,

$x > 8$,

Жообу: $x > 8$.

2.8.-2.9. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

50. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $7^x = 0{,}5$; *б)* $3^x = 25$; *в)* $10^x = \pi$; *г)* $0{,}9^x = 8$.

51. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $log_3(5x - 11) = 2$; *б)* $log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) = -3$;

в) $log_{x+1}(x^2 + 3x - 9) = 2$; *г)* $log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

52. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $log_5 x = 2\,log_5 2 + log_5 3$; *б)* $lg(x-9) + lg(2x-1) = 2$;

в) $\frac{1}{2}log_2(x-4) + \frac{1}{2}log_2(2x-1) = log_2 3$;

г) $lg(x^2 + 3x - 5) - lg(x-2) = 0$.

53. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $lg^2 x - lg x^2 + 1 = 0$;

б) $3lg^2(x-1) - 10\,lg(x-1) + 3 = 0$;
в) $log_3^2 x - log_3 x - 6 = 0$;
г) $log_4^2 x + log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0$.
54. *Теңдемелерди чыгаргыла:*
а) $\frac{1}{lgx+1} + \frac{6}{lgx+5} = 1$;
б) $\frac{1}{2}lg(2x-1) = 1 - lg\sqrt{x-9}$;
в) $3log_2^2 sinx + log_2(1 - cos2x) = 2$;
г) $log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + log_2(5^{x+3} + 1)$.
55. *Теңдемелерди чыгаргыла:*
а) $log_x 2 - log_4 x + \frac{7}{6} = 0$; *в)* $log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;
б) $log_9 x + log_3 x = log_{\frac{1}{3}} 8$; г) $log_3 x + log_{\sqrt{x}} x - log_{\frac{1}{3}} x = 6$;
56. *Теңдемелерди чыгаргыла:*
а) $x^{log_2 x - 2} = 8$; *в)* $x^{log_5 x} = 125x^2$
б) $x^{lg\,x} = 10000$; г) $x^{log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$.
57. *Теңдемелер системасын чыгаргыла:*
а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ lg\,x + lg\,y = 1; \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x + y = 36, \\ log_3 x - log_3 y = 1; \end{cases}$ *д)* $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases}$
в) $\begin{cases} log_4(x+y) = 2, \\ log_3 x + log_3 y = 2 + log_3 7; \end{cases}$ *е)* $\begin{cases} log_3(2x + y^2) = 1, \\ 2^{x+y^2} - 4 = 0. \end{cases}$
58. *Барабарсыздыктарды чыгаргыла.*
а) $lg(2x-3) > lg(x+1)$; *в)* $lg\,x + lg(x-1) < lg\,6$;
б) $log_{0,5} x > log_2(3 - 2x)$; *г)* $log_{0,5}(4x-7) < log_{0,5}(x+2)$.

2.10. Тескери функция түшүнүгү.

Эгерде $y = f(x)$ функциясы формула аркылуу берилсе, анда ага тескери функцияны табыш үчүн $f(x) = y$ теңдемесин x ке карата чыгарып, андан кийин x менен y тин орундарын алмаштырып коюу керек.

Мисалы, $y = 3x - 1$ *функциясына тескери функцияны табалы.*
Ал үчүн $3x - 1 = y$ *теңдемесин чыгарабыз*

$$3x = y + 1,$$

$$x = \frac{y+1}{3};$$ *эми x менен y тин ордун*

алмаштырабыз, $y = \frac{x+1}{3}$ *бул функция берилген функцияга тескери функция болот.*

Эгер $f(x) = y$ *теңдемеси бирден көп тамырга ээ болсо, анда* $y = f(x)$ *функциясына тескери функция болбойт.*
Мисалы, $y = x^4$ *функциясына тескери функция болбойт, себеби* $x^2 = y$ *теңдемеси* $y > 0$ *болгондо* $x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{y}$ *эки тамырга ээ болот.*

$y = x^4$ *функциясын* $x \geq 0$ *аралыгында гана карасак, анда ага тескери функция* $y = \sqrt[4]{x}$ *болот, анткени* $x^4 = y$ *теңдемеси качан* $y \geq 0$ *болгондо бир гана арифметикалык тамырга ээ болот.*

1-мисал. $y = \frac{8}{x+1}$ *функциясына тескери функцияны тапкыла:*
Чыгаруу: $\frac{8}{x+1} = y$ *теңдемесин x ке карата чыгарабыз.*

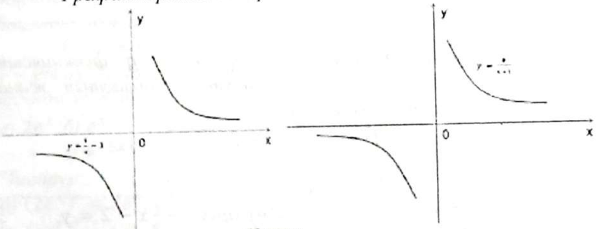
$8 = y(x + 1),$

$x + 1 = \frac{8}{y},$

$x = \frac{8}{y} - 1$ *эми x менен y тин ордун алмаштырабыз.*

$y = \frac{8}{x} - 1$ *бул функция* $y = \frac{8}{x+1}$ *функциясына тескери функция.*

Графиктери төмөнкүдөй болот.



36-сурот

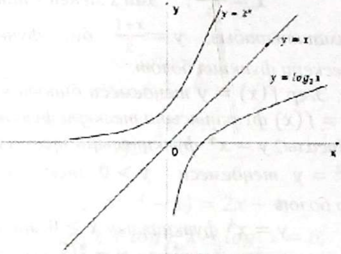
2-мисал. $y = 2^x$ *функциясына тескери функцияны тапкыла:*
Чыгаруу: $2^x = y$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$log_2 2^x = log_2 y,$

$x \cdot log_2 2 = log_2 y$,
$x = log_2 y$ эми x менен y тин ордун алмаштырабыз.

$y = log_2 x$ бул функция $y = 2^x$ функциясына тескери функция болот.

Бул өз ара тескери функциялардын графиктери 37-сүрөттө көрсөтүлгөн. Өз ара тескери функциялар-дын графиктери $y = x$ түз сызыгына карата симметриялуу болушат.



37-сүрөт

3-мисал. Берилген функцияга тескери болгон функцияны тапкыла:

а) $y = 7x - 1$; б) $y = \sqrt{4 - x}$; в) $y = x^3 - 1$; г) $y = log_5 x$.

а) Чыгаруу: $y = 7x - 1$, $7x = y + 1$, $x = \frac{y+1}{7}$, $y = \frac{x+1}{7}$.	*б) Чыгаруу:* $y = \sqrt{4 - x}$, $4 - x = y^2$, $x = 4 - y^2$, $y = 4 - x^2$.
в) Чыгаруу: $y = x^3 - 1$, $x^3 = y + 1$, $x = \sqrt[3]{y + 1}$, $y = \sqrt[3]{x + 1}$.	*г) Чыгаруу:* $y = log_5 x$, $x = 5^y$, $y = 5^x$.

4-мисал. f функциясына тескери болгон g функциясын тапкыла. g функциясынын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла.

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$;

в) $f(x) = \frac{1}{2x}$; г) $f(x) = \frac{x}{x+5}$.

а) Чыгаруу: $3x - 1 = y$, $3x = y + 1$, $x = \frac{y+1}{3}$, $g(x) = \frac{x+1}{3}$;	*б) Чыгаруу:* $-\frac{1}{3}x - 2 = y$, $-\frac{1}{3}x = y + 2$, $x = -3y - 6$, $g(x) = -3x - 6$;

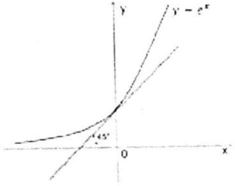
$E(g) = D(g) = (-\infty; +\infty)$.	$E(g) = D(g) = R$.
в) Чыгаруу: $\frac{1}{2x} = y$ $1 = 2x \cdot y$, $x = \frac{1}{2y}$, $g(x) = \frac{1}{2x}$; $E(g) = D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	*г) Чыгаруу:* $\frac{x}{x+5} = y$, $x = xy + 5y$, $x - xy = 5y$ $x(1-y) = 5y$ $x = \frac{5y}{1-y}$ $g(x) = \frac{5x}{1-x}$; $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ $E(g) = (-\infty; -5)$.

2.11. Корсоткучтуу функциянын туундусу.

$y = a^x$ *корсоткучтуу функциясынын (0;1) чекитине жургузулгон жаныманын абсцисса огу менен тузгон бурчу* 45^0 *болгон учурдагы а нын мааниси е саны менен белгиленет, б.а.* $y = e^x$.

e^x *функциясы экспонент деп аталат. е саны иррационалдык сан, анын мааниси болжол менен томонкуго барабар.*

$$e = 2{,}7182\ ...$$



33-сурөт

Теорема 1. e^x *функциясынын туундусу функциянын озуно барабар, башкача айтканда.*

$$(e^x)' = e^x.$$

1 – мисал. Томонку экспоненттин туундусун тапкыла:

а) $2e^x$;*б)* e^{x^2}; *в)* e^{3x+1};

г) e^{-5x+3}

Чыгаруу:

а) $(2e^x)' = 2e^x$;

б) $\left(e^{x^2}\right)' = (x^2)'e^{x^2} = 2xe^{x^2}$; *татаал функциядан*

в) $(e^{3x+1})' = (3x+1)' \cdot e^{3x+1} = 3e^{3x+1}$; *туунду алууну*

г) $(e^{-5x+3})' = (-5x+3)'^{e^{-5x+3}} = -5e^{-5x+3}$. *эсептегиле.*

Теорема 2. *a^x көрсөткүчтүү функциясынын туундусу, ал функциянын өзүн анын негизинин натуралдык логарифмасына көбөйткөн көбөйтүндүгө барабар, башкача айтканда.*

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Мисалы, $(7^x)' = 7^x \cdot \ln 7$; $\quad (5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.

2 – мисал. Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y = 3 \cdot 2^x$; $\qquad$ *б)* $y = 5^{2x+7}$;

в) $y = e^x \cdot 9^x$; $\qquad$ *г)* $y' = 2 \cdot 3^{7x} + 2^{sinx}$.

Чыгаруу: а) $y' = (3 \cdot 2^x)' = 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2$;

б) $y' = (5^{2x+7})' = (2x+7)' \cdot 5^{2x+7} \cdot \ln 5 = 2 \cdot 5^{2x+7} \cdot \ln 5$;

в) $y' = (e^x \cdot 9^x)' = (e^x)' \cdot 9^x + e^x \cdot (9^x)' = e^x \cdot 9^x + e^x \cdot 9^x \ln 9$;

г) $y' = \left(2 \cdot 3^{7x} + 2^{sinx}\right)' = 2 \cdot (7x)' \cdot 3^{7x} \cdot \ln 3 + (sinx)' \cdot 2^{sinx} \cdot \ln 2 = 14 \cdot 3^{7x} \ln 3 + cosx \cdot 2^{sinx} \cdot \ln 2$;

Теорема 3. *Анык сандардын көптүгүндө a^x функциясы үчүн баштапкы функция $\frac{a^x}{\ln a}$ функциясы болот, б.а.*

$$f(x) = a^x; \quad F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Мисалы, $f(x) = 3^x$; $\quad F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

$$f(x) = \ell^x; \qquad F(x) = e^x + C.$$

3-мисал. Функциялар үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = 3e^x$; $\qquad$ *г)* $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x - 3{,}4^{-x}$;

б) $f(x) = 5^{-2x}$; $\qquad$ *д)* $f(x) = e^{5x} + 3^{1+2x}$;

в) $f(x) = e^{7-5x}$; $\qquad$ *е)* $f(x) = 3 \cdot 2^{5-3x} - e^{1+4x}$.

Чыгаруу: Бул функциялардын баштапкы функцияларын табуу үчүн $F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$ формуласын жана баштапкы функцияны табуунун үч эрежесин пайдаланабыз.

а) $f(x) = 3e^x$; $\qquad F(x) = 3e^x + C$;

б) $f(x) = 5^{-2x}$; $\qquad F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5^{-2x}}{\ln 5} + C$;

в) $f(x) = e^{7-5x}$; $\qquad F(x) = -\frac{1}{5} e^{7-5x} + C$;

г) $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x - 3{,}4^{-x}$; $\qquad F(x) = 2 \cdot \frac{0{,}5^x}{\ln 0{,}5} + \frac{3{,}4^{-x}}{\ln 3{,}4} + C$;

д) $f(x) = e^{5x} + 3^{1+2x}$; $\quad F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{1+2x}}{\ln 3} + C$

е) $f(x) = 3\cdot 2^{5-3x} - e^{1+4x}$. $\quad F(x) = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{2^{5-3x}}{\ln 2} - \frac{1}{4}e^{1+4x} + C$

$$= -\frac{2^{5-3x}}{\ln 2} - \frac{1}{4}e^{1+4x} + C;$$

4-мисал. Абциссасы x_0 болгон чекитте f функциясынын графигине жүргүзүлгөн жанымасынын теңдемесин жазгыла:

а) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$; $\quad$ *б)* $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$.

Чыгаруу: Жанымасынын теңдемеси

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *ушул формуланы пайдаланабыз.*

а) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$;

1) $f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$ *демек,* $f'(x_0) = -e^{-0} = -1$.

2) $f(x_0) = f(0) = e^{-0} = 1$ *бул маанилерди формулага коебуз.*

3) $y = 1 + (-1)(x - 0) = 1 - x$.

Жообу: $y = 1 - x$.

б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$.

1) $f(1) = 3' = 3$,

2) $f'(x) = (3^x)' = 3^x\cdot\ln 3$; $f'(1) = 3\cdot\ln 3$.

3) $y = 3 + 3\ln 3\cdot(x - 1) = 3 + 3\ln 3\cdot x - 3\ln 3$.

Жообу: $y = 3 + 3\ln 3\cdot x - 3\ln 3$.

5-мисал. Интегралды эсептегиле:

а) $\int_0^1 7^x dx$; $\quad$ *б)* $\int_0^1 e^{5x}dx$;

в) $\int_{-1}^2 2^x dx$.

Чыгаруу: *а)* $\int_0^1 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7}\Big|_0^1 =$

$= \frac{7'}{\ln 7} - \frac{7^0}{\ln 7} = \frac{7}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7} = \frac{6}{\ln 7}$;

б) $\int_0^1 e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x}\Big|_0^1 =$

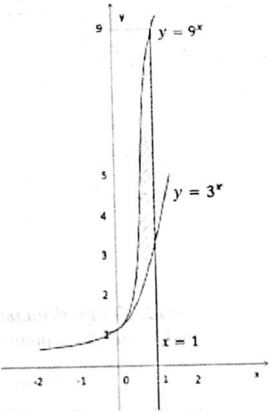
$= \frac{e^5}{5} - \frac{e^0}{5} = \frac{e^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{e^5-1}{5}$;

в) $\int_{-1}^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-1}^2 = \frac{2^2}{\ln 2} -$

$-\frac{2^{-1}}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} = \frac{7}{2\ln 2}$.

6-мисал. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

а) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$;



39-сүрөт

б) $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1.$

Чыгаруу: а) $y = 3^x, \quad y = 9^x, \quad x = 1;$

Бул функциялардын графиктерин бир эле координаталар системасына чийип алабыз.

Берилген сызыктар менен чектелген фигуранын аянты $y = 9^x$ *жана* $y = 3^x$ *функциянын графиктери чектелген ийри сызыктуу трапециялардын аянтары-нын айырмасына барабар.*

$S = \int_0^1 9^x dx - \int_0^1 3^x dx =$

$= \frac{9^x}{ln9}\Big|_0^1 - \frac{3^x}{ln3}\Big|_0^1 = \frac{9}{ln9} - \frac{9^0}{ln9} -$

$-\left(\frac{3}{ln3} - \frac{3^0}{ln3}\right) = \frac{9}{ln9} - \frac{1}{ln9} -$

$-\frac{3}{ln3} + \frac{1}{ln3} = \frac{8}{ln9} - \frac{2}{ln3} = \frac{8}{2ln3} - \frac{2}{ln3} = \frac{4}{2ln3} = \frac{2}{ln3};$

Жообу: $S = \frac{2}{ln3}$

б) $y = e^x, \qquad y = e^{2x}, \qquad x = 1.$

График чийип алабыз.

$$S = \int_0^1 e^{2x}dx - \int_0^1 e^x dx =$$

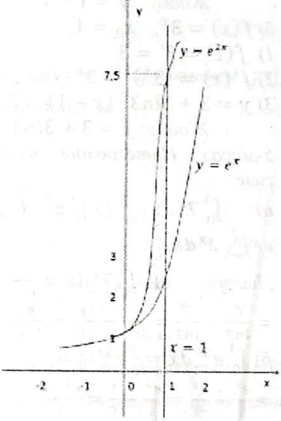
$= \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 -$

$-(e - e^0) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - (e - 1) =$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - e + 1 =$

$= \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}.$

Жообу: $S = \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}.$



10-сурөт

2.12. Логарифмалык функциянын туундусу.

Логарифмалык функциянын туундусу

$$(log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

формуласы аркылуу табылат.

Мисалы, $\qquad (log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5};$

Негизи е болгон логарифмалык функциянын туундусу б.а. $\ln x$ *тин туундусу* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *формуласы боюнча табылат.*

Мисалы, $(\ln x^3)' = (3\ln x)' = \frac{3}{x}$;

1-мисал. Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y = log_3 x$; *г)* $y = log_3(5x-1)^e$;

б) $y = 5\ log_7 x$; *д)* $y = x^2 \ln x$;

в) $y = 3\sin x + 2\ln x$; *е)* $y = \ln\sqrt[4]{(x^3-2)^3}$.

Чыгаруу: $(log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ *формуласын пайдаланабыз.*

а) $y' = (log_3 x)' = \frac{1}{x\ln 3}$;

б) $y' = (5\ log_7 x)' = 5\cdot\frac{1}{x\ln 7} = \frac{5}{x\ln 7}$;

в) $y = 3\sin x + 2\ln x$; $(u+\varphi)' = u' + \varphi'$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$y' = (3\sin x + 2\ln x)' = (3\sin x)' + (2\ln x)' = 3cosx + \frac{2}{x};$$

г) $y' = (log_3(5x-1)^2)' = \left(2log_3(5x-1)\right)' =$

$= 2(5x-1)'\frac{1}{(5x-1)\ln 3} = 2\cdot 5\cdot\frac{1}{(5x-1)\ln 31} = \frac{10}{(5x-1)\ln 3}$;

д) $y = x^2\cdot\ln x$, $(u\cdot\vartheta)' = u'\cdot\vartheta + u\cdot\vartheta'$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$y' = (x^2\cdot lnx)' = (x^2)'\cdot\ln x + x^2\cdot(\ln x)' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} =$$
$$= 2x\ln x + x;$$

е) $y' = \left(\ln\sqrt[4]{(x^3-2)^3}\right)' =$

$$= \left(\ln\left(x^3-2\right)^{\frac{3}{4}}\right)' = \left(\frac{3}{4}\ln(x^3-2)\right)' =$$
$$= \frac{3}{4}\cdot(x^3-2)'\cdot\frac{1}{(x^3-2)} =$$
$$= \frac{3}{4}\cdot 3x^2\cdot\frac{1}{x^3-2} = \frac{\frac{9}{4}\cdot x^2}{x^3-2}.$$

Татаал функциянын туундусун табуу эрежесин колдонобуз.

2 –мисал. $f(x) = \ln(2x-e)$ *функциясынын графигинин абсциссасы* $x_0 = e$ *болгон чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин тапкыла.*

Чыгаруу: Жаныманын теңдемеси

$y = f(x_0) + f'(x_o)(x - x_o)$ *болот.*

$$f'(x) = (ln(2x - e))' = (2x - e)' \cdot \frac{1}{2x - e} = \frac{2}{2x - e};$$

$$f(e) = ln(2e - e) = ln\, e = 1;$$

$$f'(e) = \frac{2}{2e - e} = \frac{2}{e};$$

$$y = 1 + \frac{2}{e}(x - e) = 1 + \frac{2}{e} \cdot x - \frac{2}{e} \cdot e = 1 + \frac{2x}{e} - 2 = \frac{2x}{e} - 1;$$

Жообу: $y = \frac{2x}{e} - 1.$

3-мисал. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2x+1}$ *үчүн* $F(0) = 3$ *болгондогу баштапкы функциясын тапкыла:*

Чыгаруу: $(e^x)' = e^x$ *жана* $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$ *болгондуктан*

$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} ln(2x + 1) + C.$ *функциясы берилген функциянын баштапкысы болот.* $F(0) = 3$ *шартын пайдаланып* C *нын маанисин табабыз.*

$$2e^{\frac{0}{2}} + \frac{1}{2} \cdot ln(2 \cdot 0 + 1) + C = 3\,.$$

$$2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot ln\, 1 + C = 3,$$

$$2 + C = 3,\ C = 3 - 2 = 1,$$

Демек, $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} ln(2x + 1) + 1.$

Жообу: $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} ln(2x + 1) + 1.$

4-мисал. Эгер $f(x) = 2e^x \cdot ln\, x$ *болсо,* $f'(1)$ *ди тапкыла.*

Чыгаруу: $f'(x) = (2e^x \cdot ln\, x)' = (2e^x)' \cdot ln\, x + 2e^x \cdot (ln\, x)' = = 2e^x\, ln\, x + 2e^x \cdot \frac{1}{x}$

$$f'(1) = 2 \cdot e' \cdot ln\, 1 + 2 \cdot e' \cdot \frac{1}{1} = 2e \cdot 0 + 2e = 2e;$$

Жообу: $f'(1) = 2e.$

5–мисал. $\int_0^{log_2 3} 2^{3x}\, dx$ *ти эсептегиле.*

Чыгаруу: $\int_0^{log_2 3} 2^{3x}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x}}{ln\, 2}\Big|_0^{log_2 3} = \frac{2^{3 log_2 3}}{3\, ln\, 2} - \frac{2^{3 \cdot 0}}{3\, ln\, 2} = \quad = \frac{2^{log_2 3^3}}{3\, ln\, 2} - \frac{1}{3\, ln\, 2} = \frac{27}{3\, ln\, 2} - \frac{1}{3\, ln\, 2} = \frac{26}{3\, ln\, 2}.$

Жообу: $\frac{26}{3\, ln\, 2}.$

6–мисал. $\boldsymbol{a}$ *параметринин кайсы маанисинде*

$$\int_{0,5a}^{a} e^{2x}\, dx = 1.$$

Чыгаруу: $\int_{0,5a}^{a} e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{2} e^{2x} |_{0,5a}^{a} = \frac{1}{2} e^{2a} - \frac{1}{2} e^{a}$;

$\frac{1}{2} e^{2a} - \frac{1}{2} e^{a} = 1$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$e^{2a} - e^{a} - 2 = 0,$

$e^{a} = t$ *жаңы өзгөрмө кийиребиз.*

$t^2 - t - 2 = 0, \quad D = 1 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9,$

$$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad t_1 = \frac{1+3}{2} = 2; \quad t_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Демек, $e^{a} = 2$ $\qquad$ $e^{a} = -1$ *тамырга ээ болбойт.*

$\ln e^{a} = \ln 2$

$a \cdot \ln e = \ln 2$

$a = \ln 2.$ $\qquad$ *Жообу:* $a = \ln 2$.

7 –мисал. $f(x) = 2x - \ln x$ *функциясын изилдегиле.*

Чыгаруу:

1. Аныкталуу областы $D(f) = (0; +\infty)$.

2. Функция жуп да так да эмес. Анткени $f(-x) = f(x)$ *жана* $f(-x) = -f(x)$ *барабардыктары аткарылбайт.*

3-4. $x = 0$ *болгондо функция мааниге ээ болбойт жана* $2x - \ln x = 0$ *теңдемесинин тамырлары жок. Ошондуктан функциянын графиги координаталык октор менен кесилишпейт.*

5–6. Функциянын туундусун таап, сыналуучу чекиттерди табабыз.

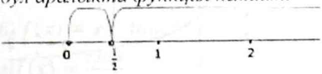
$f'(x) = (2x - \ln x)' = 2 - \frac{1}{x};$

$2 - \frac{1}{x} = 0, \; x \neq 0.$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ *бул чекит сан огун төмөнкүдөй интервалдарга бөлөт.*

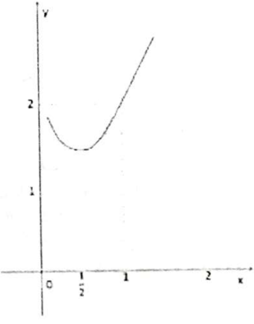
$\left(0; \frac{1}{2}\right)$ *интервалында* $f'(x) < 0$. *бул аралыкта функция кемийт.*



41-сүрөт

$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ *интервалында*

$f'(x) > 0$, *демек бул интервалда функция өсөт.*



42-сүрөт

$x = \frac{1}{2}$ *чекитинде туунду минустан плюска белгисин өзгөртөт, демек бул чекит минимум болот.*

$x_{min} = \frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)_{min} = 2 \cdot \frac{1}{2} - ln\frac{1}{2} = 1 - ln\frac{1}{2}$.

Жообу: $x_{min} = \frac{1}{2}$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)_{min} = 1 - ln\frac{1}{2}$;

$\left(0; \frac{1}{2}\right)$ *аралыгында функция кемийт,*

$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ *аралыгында функция өсөт.*

8 –мисал. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

$$y = \frac{4}{x} + 2, \ \ y = 0, \ \ x = 2, \ \ x = 6;$$

Чыгаруу: $y = \frac{4}{x} + 2$ *функциясынын графигин түзүү үчүн таблица түзүп алабыз.*

x	1	2	4	6	8
y	6	4	3	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{2}$

43 – сүрөттөгү ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептейбиз.

$S = \int_2^6 \left(\frac{4}{x} + 2\right) dx =$

$= (4\,ln\,x + 2x)\,|_2^6 =$

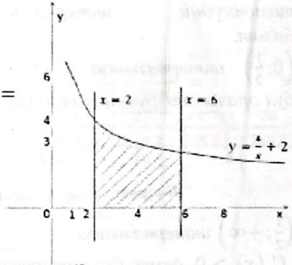
$= 4 \cdot ln6 + 2 \cdot 6 - (4 \cdot ln2 + 2 \cdot 2) =$

$= 4 \cdot ln\,6 + 12 - 4ln2 - 4 =$

$= 4(ln\,6 - ln\,2) + 8 =$

$= 4 \cdot ln\frac{6}{2} + +8 = 4 \cdot ln\,3 + 8.$

Жообу: $S = 4 \cdot ln\,3 + 8.$



43-сүрөт

2.11.-2.12. Көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциянын туундусу.

Көнүгүүлөр үчүн тапшырма.

59. Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y = 5 \cdot 3^x$; *б)* $y = 3^{5x+1}$; *в)* $y = 2 \cdot e^x + 3$;

г) $y = e^x \cdot sinx + 2^{3x+5}$.

60. Функциялардын баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = 5e^x$; *в)* $f(x) = 2 \cdot e^{3x} - 3^{2+5x}$;

б) $f(x) = 3 \cdot 0{,}7^x - 2^{-x}$; г) $f(x) = 7 \cdot 3^{5-2x} - e^{1+3x}$.

61. Абциссасы x_o *болгон чекитте* f *функциясынын графигине жүргүзүлгөн жанымайын теңдемесин тапкыла:*

а) $f(x) = e^x$, $x_o = 0$; *б)* $f(x) = 2^x$, $x_o = 1$.

62. Интегралды эсептегиле.

а) $\int_0^1 0,2^x\,dx$; *в)* $\int_{-1}^1 5^x dx$;

б) $\int_0^1 e^{3x} dx$; *г)* $\int_1^2 3^x dx$.

63. $f(x) = xe^{-x}$ *функциясынын өсүшүн (кемишин), экстремумдарын изилдегиле.*

64. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

$$y = (\frac{1}{2})^x, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 1.$$

65. Функциялардын туундусун тапкыла.

а) $y = log_5 x$; *г)* $y = ln(5 + 2x)$;

б) $y = lg(3x + 1)$; *д)* $y = x^5\, ln\, x$;

в) $y = \frac{lg\, x}{5 - lg\, x}$; *е)* $y = lg\,\sqrt[5]{(x^3 - 1)^3}$;

66. Фнукциялардын туундусун тапкыла.

а) $f(x) = ln\sqrt[5]{\frac{3-x}{3+x}}$; *г)* $f(x) = \frac{x^2}{ln\, x}$;

б) $f(x) = x^3 \cdot log_3 x$; *д)* $f(x) = \frac{ln(3+2x)}{x^2-1}$;

в) $f(x) = \frac{2\, ln\, x}{x}$; *е)* $f(x) = \frac{log_5 x^3}{x+1}$.

67. Төмөнкү функциялардын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.

а) $f(x) = \frac{5}{3x+1}$; *в)* $f(x) = \frac{7}{5x\, ln\, 3}$;

б) $f(x) = \frac{1}{x+7}$; *г)* $f(x) = \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x}$.

68. Абсциссасы x_0 *болгон чекитте* f *функциясынын графигин жанымасынын теңдемесин жазгыла.*

$$f(x) = log_2(x-1), \quad x_o = 2.$$

69. Интегралды эсептегиле.

а) $\int_2^5 \frac{3dx}{x}$; *б)* $\int_0^2 \frac{dx}{4x+3}$;

в) $\int_2^e \frac{dx}{x+1}$; *г)* $\int_{-1}^1 \frac{dx}{5-3x}$.

70. $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ *функциясынын өсүшүн, кемишин жана экстремумдарын изилдегиле.*

71. $y = \frac{8}{x}$. *жана* $y = 6 - x$ *функцияларынын графиктери аркылуу чектелген фигуранын аянтын тапкыла.*

2.12. Даражалуу функция жана анын туундусу.

Аныктама. $f(x) = x^{\propto}$ *формуласы аркылуу берилген функция, даражалуу функция деп аталат.*

$\propto$ *-бүтүн сан болсо,* $f(x) = x^{\propto}$ *даражалуу функциясы* $x < 0$ *үчүн да аныкталган.*

Даражалуу функция $\propto$ *жуп болсо жуп функция,* $\propto$ *так болсо так функция болот.*

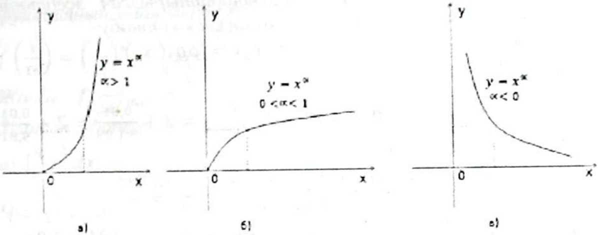
$x > 0$ *үчүн,* $\propto < 0$ *болгон учурда даражалуу функция кемүүчү болот.*

$x = 0$ *болгондо,* $x^{\propto} = 0$ *болот.*

$x > 0$ *болгон учурда,* $\propto > 0$ *болгондо* $(0; +\infty)$ *аралыгында даражалуу функция өсөт.*

Даражалуу функциянын туундусу $(x^{\propto})' = \propto \cdot x^{\propto-1}$ *формуласы менен табылат.*

Даражалуу функциянын графиктери $\propto$ *нын ар кандай маанилери үчүн төмөндөгүдөй болот.*



44-сурот

Даражалуу функциянын маанилерин эсептөө үчүн төмөндөгүдөй жакындатылган формула пайдаланылат.

$$\boxed{(1+\Delta x)^{\alpha} = 1 + \alpha\cdot\Delta x} \qquad (1)$$

$f(x)$ *функциясы үчүн* Δx *эң кичине болгондо* x_0 *чекитинде* $f(x)$*тин жакындатылган маанисин*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (2)$$

формуласы боюнча эсептөөгө болот. (1) жана (2) формуланы жогорку даражалуу тамырдан чыгарууда, эсептөө жүргүзүүдө колдонгон ыңгайлуу.

$\alpha = \frac{1}{n}$ деп алсак

$$(1+\Delta x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1+\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{n} \qquad (3)$$

1-мисал. Жакындаштырылган маанилерди тапкыла.

а) $(1{,}003)^{75}$; *б)* $(1{,}01)^{10}$; *в)* $\frac{1}{(0.998)^{40}}$; *г)* $\frac{1}{(0.996)^{50}}$.

Чыгаруу: (1) формуланы пайдаланабыз.

а) $(1{,}003)^{75} = (1+0{,}003)^{75} = 1 + 75\cdot 0{,}003 = 1 + 0{,}225 \approx 1{,}225$;

б) $(1{,}01)^{10} = (1+0{,}01)^{10} = 1 + 10\cdot 0{,}01 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$;

в) $\frac{1}{(0.998)^{40}} = (0.998)^{-40} = (1-0{,}002)^{-40} =$
$= 1 + (-40)\cdot(-0{,}002) = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$;

г) $\frac{1}{(0.996)^{50}} = (0.996)^{-50} = (1-0.004)^{-50} =$
$= 1 + (-50)(-0{,}004) = 1 + 0{,}2 \approx 1{,}2$.

2-мисал. $log_3 9{,}01$ *дин жакындаштырылган маанисин тапкыла:*

Чыгаруу: $log_3(9+0{,}01)$ *жакындаштырылган эсептөөнүн* $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ *формуласын колдонобуз.*
Мисалда $x_0 = 9;\ \Delta x = 0{,}01;\ f(x_0) = log_3(x_0).$
$(log_3 x_0)' = \frac{1}{x_0 ln3};$

Демек, $log_3(9+0{,}01) = log_3 9 + \frac{0{,}01}{9\cdot ln3} = 2 + \frac{0{,}01}{9\cdot 1{,}09} \approx 2 + \frac{0{,}01}{9{,}81} \approx$
$\approx 2 + 0.001 \approx 2{,}001.$

3- мисал. Жакындатылган маанилерди эсептегиле:

а) $\sqrt{1{,}08}$; *б)* $\sqrt[5]{32{,}64}$; *в)* $\sqrt[8]{270}$; *г)* $\sqrt[4]{1{,}02}$.

Чыгаруу: а) $\sqrt{1{,}08} = \sqrt{1+0{,}08} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}08 = 1 + 0{,}04 \approx 1{,}04$;

б) $\sqrt[5]{32{,}64} = \sqrt[5]{32+0{,}64} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{0{,}64}{32}\right)} = 2\sqrt[5]{1+0{,}02} =$
$= 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}02\right) = 2(1+0{,}004) = 2\cdot 1{,}004 = 2{,}008$;

в) $\sqrt[8]{270} = \sqrt[8]{256+14} = \sqrt[8]{256\left(1+\frac{14}{256}\right)} = 2\cdot\left(1+\frac{14}{8\cdot 256}\right) =$
$= 2(1+0{,}006) \approx 2{,}012$;

г) $\sqrt[4]{1{,}02} = (1+0{,}02)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}02 \approx 1 + 0{,}005 \approx 1{,}005.$

4-мисал. J *аралыгында* f *функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.*

а) $f(x) = x^{\frac{2}{5}},\quad J = [1; 32]$; *б)* $f(x) = x^{\frac{3}{4}},\quad J = \left[\frac{1}{16}; 81\right].$

Чыгаруу: а) $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ *бул функциянын туундусун табабыз*

$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}.$$

Сыналуучу чекиттерин табабыз

$\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = 0$ *бул теңдеменин тамырлары жок.*

Демек, сыналуучу чекиттер жок. Мындай учурда функциянын маанилерин кесиндинин учтарында эсептеп коебуз.

$f(1) = 1^{\frac{2}{5}} = 1,\qquad f(32) = 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{(2^5)^2} = 2^2 = 4.$

Жообу: $f(1)_{min} = 1,\ f(32)_{max} = 4.$

Чыгаруу: б) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, *функциянын туундусун табабыз*

$$f'(x) = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}.$$

$\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = 0$ *теңдеменин тамырлары жок.*

Демек, сыналуучу чекиттер да жок. Кесиндинин учтарындагы функциянын маанилерин табабыз.

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^3} = \frac{1}{8}, \quad f(81) = (81)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(81)^3} = 27.$$

Жообу: $f(\frac{1}{16})_{min} = \frac{1}{8}, \ f(81)_{max} = 27.$

5-мисал. Интегралды эсептегиле.

а) $\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx;$ *б)* $\int_e^{e^2} 2x^{-1}\,dx.$

Чыгаруу: а) $\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\Big|_1^4 = \frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}}\Big|_1^4 = \frac{2}{7}\cdot 4^{\frac{2}{7}} - \frac{2}{7}\cdot 1^{\frac{2}{7}} =$

$= \frac{2}{7}\sqrt{4^7} - \frac{2}{7}\cdot 1 = \frac{2}{7}\cdot 2^7 - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}(128-1) = \frac{2}{7}\cdot 127 = \frac{254}{7};$

б) $\int_e^{e^2} 2x^{-1}\,dx = \int_e^{e^2}\frac{2}{x}dx = 2lnx\Big|_e^{e^2} = 2lne^2 - lne =$

$= 4lne - 1 = 4 - 1 = 3.$

2.12. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма.

72. *а)* $25^{\frac{1}{3}}$; *б)* $\sqrt[3]{60}$; *в)* $\sqrt[5]{32{,}3}$; *г)* $\sqrt[4]{65}$; *д)* $\sqrt[4]{16{,}3}$

е) $\sqrt[3]{128}$; *ж)* $\frac{1}{1{,}005^{30}}$; *з)* $\frac{1}{2{,}024^3}$.

73. f *функциясынын графигин түзгүлө жана туундусун тапкыла.*

а) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$; *б)* $f(x) = x^{\pi}$;

в) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; *г)* $f(x) = (3x)^{ln2}$.

74. *Функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.*

а) $f(x) = -\frac{1}{5}^{x^{-\sqrt{3}}}$; *б)* $f(x) = 7\cdot x^{-2}$;

в) $f(x) = x^{3\sqrt{2}}$; *г)* $f(x) = x^e$.

75. *Интегралды эсептегиле.*

а) $\int_1^4 \frac{2dx}{x^{\frac{3}{2}}}$; *б)* $\int_1^{16} 3x^{\frac{1}{4}}\,dx.$

76. *Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.*

а) $y = x^{\sqrt{2}}, \ y = 0, \ x = 1;$

б) $y = x^{\sqrt{3}}, \ y = \frac{1}{x}, \ x = \frac{1}{2}.$

2.13. Дифференциалдык теңдемелер жөнүндө түшүнүк.

1. Жонокой дифференциалдык теңдемелер.

Аныктама.

Белгисиз функциянын туундусун камтыган жана аргументтин өзүн байланыштырып турган туюнтма түрүндө берилген теңдемелер ***дифференциалдык теңдемелер*** *деп аталат.*

Мисалы, $y' = 2x + 5$; $y' = cosx$.

Теңдемедеги туундунун тартибине жараша 1-тартиптеги жана 2-тартиптеги дифференциалдык теңдемелер болуп болунушот.

Мисалы, $x''(t) = a(t)$, $y'' = -16y$ *булар 2-тартиптеги дифференциалдык теңдемелер.*

Дифференциалдык теңдемелер интегралдоо жолу менен чыгарылат. Анын жообу сан эмес, функция болуп эсептелет.

1-мисал. *а)* $y' = 2x + 5$; *б)*$y' = cosx$ *дифференциалдык теңдемелерин чыгаргыла:*

Чыгаруу: а) $2x + 5$ *функциясынын баштапкы функциясын табабыз.*

$y = x^2 + 5x + C$ *бул функция берилген теңдеменин чыгарылышы болот.*

б) $y' = cosx$, $y = sinx + C$.

Жообу: $y = sinx + C$.

2. Көрсөткүчтүү өсүүнүн жана көрсөткүчтүү кемүүнүн дифференциалдык теңдемелери.

Социалдык маселелерди изилдөөдө физикалык, биологиялык маселелерди чыгарууда төмөнкү

$y' = ky$ *(1) дифференциалдык теңдемени канааттандырган функцияны табуу маселеси келип чыгат.*

Бул дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы

$y = Ce^{kx}$ *(2) функциясы болот.*

Мында С – турактуу чоңдук.

Радиоактивдүү заттардын ажыроо ылдамдыгы, жарым ажыроо мезгили аркылуу б.а. заттын жарымы калгандай ажыроо убактысы менен мүнөздөлөт.

Эгер убакыттын t учурунда радиоактивдүү заттын ажыроо ылдамдыгы $m'(t)$ болсо, анда

$$m'(t) = -km(t) \quad (3) \quad \text{болот.}$$

Мында k – заттын радиоактивдүүлүгүнө көз каранды чоңдук.

$m(t) = ce^{-kx}$ *функциясы (3) теңдеменин чыгарылышы болот.*

Убакыттын t учурунда масса m_0 болсо, анда $c = m_0$ *болот.*

Анда $\quad m(t) = m_0 e^{-kx} \quad (4)$ *болот.*

T – жарым ажыроо мезгили болсун, $t = T$ *болгон учурда (4) барабардыктан*

$$m(T) = \frac{1}{2}m_0 \quad \text{б.а.} \quad \frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT} \quad \text{болот}$$

$e^{-kt} = 2, \quad kT = \ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{T}$ *экендиги келип чыгат.*

Эгерде k нын маанисин (4) барабардыкка койсок

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}} \quad (5) \quad \text{формуласын алабыз.}$$

2-мисал. Массасы 1г га барабар болгон радий 10 жылдан кийин 0,999г га чейин азайган. Канча жылдан кийин ал радийдин массасы 0,5г га чейин азайат?

Чыгаруу: Радийдин массасы жарымы калганча б.а. 0,5г калганча азайып жатат. Демек, биз жарым ажыроо убактысын табышыбыз керек.

Маселенин шарты боюнча $m_0 = 1г$ $m(t) = 0{,}999г$ $t = 10$ *жыл.*

$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$0{,}999 = 1 \cdot 2^{-\frac{10}{T}},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{T}} = 0{,}999,$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{T}} = \ln 0{,}999, \quad \frac{10}{T}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 0{,}999,$$

$$\frac{10}{T} = \frac{\ln 0{,}999}{\ln\frac{1}{2}}, \qquad 10 \cdot \ln\frac{1}{2} = T \cdot \ln 0{,}999,$$

$$T = \frac{10 \cdot ln\frac{1}{2}}{ln\, 0{,}999} \approx 6927 \text{ жыл.}$$

Жообу: $T = 6927$ *жыл.*

3. Гармоникалын термелүүнүн дифференциалдык теңдемеси.

Берилген f *функциясынын туундусунан б.а.* f' *функциясынан алынган туунду экинчи тартиптеги туунду деп аталат жана* f'' *деп белгиленет.*

Мисалы. $y = 2x^3 + 5x^2 - 3$ *функциясынын экинчи тартиптеги туундусун табалы.*

$$y' = (2x^3 + 5x^2 - 3)' = 6x^2 + 10x;$$
$$y'' = (6x^2 + 10x)' = 12x + 10.$$

$y = sin\,x$ *жана* $y = cos\,x$ *функцияларынын экинчи тартиптеги туундуларын табабыз.*

$$y = sin\,x, \quad y' = (sin\,x)' = cos\,x,$$
$$y'' = (cos\,x)' = -sinx;$$
$$y = cos\,x, \quad y'(cos\,x)' = -sin\,x,$$
$$y''(-sin\,x)' = -cos\,x.$$

Термелүү кыймылы коштогон маятниктин, пружинанын, электр тогунун кыймыл процесстерине байланышкан көптөгөн маселелерди чечүү

$y'' = -\omega^2 y$ (6) *түрүндөгү экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди чыгарууга алып келет.*

(6) теңдеменин чыгарылышы

$y(x) = c, sin(\omega x + c_2)$ (7) *түрүндө болот.*

Мында – берилген оң сан,

c_1 *жана* c_2 *– коюлган шарттары менен аныктала турган турактуу чоңдуктар.*

(6) теңдеме гармоникалык термелүүнүн дифференциялык теңдемеси,

(7) барабардык гармоникалык термелүүнүн теңдемеси деп аталат.

Эгер $y(t)$ *убакыттын t учурундагы эркин термелип жаткан кылдын тең салмактуу абалынан кыйшайган чекитинин абалы болсо, анда кылдын гармоникалык термелүүсүнүн теңдемеси*

$y(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)$ (8) *түрүндө болот.*

Мында A *–термелүүнүн амплитудасы,*

ω *–жыштыгы,*

φ — алгачкы фазасы.

4-мисал. Берилген шартты канааттандыра турган дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын тапкыла:

а) $y' = 4x + 1, \quad y(1) = 0;$

б) $y' = 2\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$

Чыгаруу: а) $y' = 4x + 1, \quad y(1) = 0,$

$4x + 1$ функциясынын баштапкы функциясын табабыз.

$y = 2x^2 + x + c,$ $\quad y(1) = 0$ шарттын пайдаланып, с нын маанисин таба-быз.

$$y(1) = 2\cdot 1^2 + 1 + c = 0$$

$$3 + c = 0$$

$$c = -3$$

демек, дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы

$y = 2x^2 + x - 3$ функциясы болот.

Чыгаруу: б) $y' = 2\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$

$2\sin x$ тин баштапкы функциясын табабыз.

$y = -2\cos x + c,$ $\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ шартын пайдаланып С нын маанисин таап алабыз.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} + c = 1,$$

$$-2\cdot\frac{1}{2} + c = 1,$$

$$-1 + c = 1, \quad c = 2.$$

Жообу: $y = -2\cos x + 2.$

5 – мисал. Гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемесин жазгыла:

а) $y = 3\cos\left(0{,}2x + \frac{\pi}{3}\right);$ $\qquad$ б) $y = 7\sin(2t - 5).$

Чыгаруу: а) Гармоникалык термелүүнү дифференциалдык теңдемеси 2–тартипте болгондуктан $3\cos\left(0{,}2x + \frac{\pi}{3}\right)$ функциясынын 2-тартиптеги туундусун табабыз.

$$y' = \left(3\cos\left(0{,}2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -0{,}2\cdot 3\sin\left(0{,}2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y'' = \left(-0{,}2\cdot 3\sin\left(0{,}2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -0{,}04\cdot 3\cos\left(0{,}2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Демек, $\quad y'' = -0{,}04y;$

Жообу: , $\quad y'' = -0{,}04y.$

Чыгаруу: б) $y = 7\sin(2t - 5),$

$y' = \left(7\sin(2t - 5)\right)' = 2\cdot 7\cos(2t - 5),$

$y''_t = \left(2 \cdot 7cos(2t-5)\right)' = -4 \cdot 7sin(2t-5)$,

Демек, $y'' = -4y$;

Жообу: , $y'' = -4y$.

6-мисал. а) $y = 2e^{5x}$ *функциясы* $y' = 5y$ *теңдемесинин;*

б) $y = 9e^{-7x}$ *функциясы* $y' = -7y$ *теңдемесинин чыгарылышы боло тургандыгын текшергиле.*

Чыгаруу: а) $y = 2e^{5x}$ *функциясынын туундусун табабыз.*

$$y' = (2e^{5x})' = (5x)' \cdot 2e^{5x} = 5 \cdot 2e^{5x} = 5y$$

Жообу: $y' = 5y$ *теңдемесинин чыгарылышы* $y = 2e^{5x}$ *функциясы болот.*

б) $y = 9e^{-7x}$,

$$y' = (9e^{-7x})' = (-7x) \cdot 9e^{-7x} = -7 \cdot 9e^{-7x} = -7y,$$

$$y' = -7y.$$

Жообу: $y = 9e^{-7x}$ *функциясы* $y' = -7y$ *теңдемесинин чыгарылышы болот.*

2.14. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

77. $y(t)$ *функциясы берилген дифференциалдык теңдемесинин чыгарылышы болорун текшергиле.*

а) $y(t) = 5cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$, $y'' = -16y$;

б) $y(t) = 2sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$, $y'' - \frac{1}{9}y = 0$.

78. Берилген шартты канааттандырган дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын тапкыла.

а) $y' = -3cosx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$;

б) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$.

79. а) $y = 3e^{-2x}$ *функциясы* $y' = -2y$ *теңдемесин,*

б) $y = 10e^{6x}$ *функциясы* $y' = 6y$ *теңдемесин канааттандыра тургандыгын текшергиле.*

80. Гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемесин жазгыла:

а) $x = 5cos(3t-1)$; *б)* $x = 2sin(0{,}5t-7)$.

III бөлүм. Теңдемелер, барабарсыздыктар. Теңдемелердин жана барабарсыздыктардын системалары.

3.1. Теңдемелерди жана барабарсыздыктарды классификациялоо.

Теңдемелер белгисизге карата аткарылган амалдардын мүнөзүнө жараша жалпысынан 2 типке бөлүнөт:

1. Алгебралык теңдемелер;

2. Трансценденттик теңдемелер.

1-аныктама. Эгерде теңдемеде белгисизге карата кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, даражага көтөрүү жана тамыр чыгаруу амалдары гана катышса, анда мындай теңдемелер ***алгебралык теңдемелер*** *деп аталат.*

Мисалы: $2x + 5 = 12$, $x^2 + 7x - 3 = 0$,

$\frac{x^3+9}{x} = 12$, $\sqrt{x-3} - \sqrt{x^2+5} = -14$.

2-аныктама. Эгерде теңдемеде белгисизге карата 1-аныктамада аталган 6 амалдан башка амалдар аткарылса, анда ал теңдеме ***трансценденттик*** *деп аталат.*

Мисалы: 1) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$;

2) $\lg^2 \frac{x+2}{x+1} + e^x = 5$;

3) $x^{\frac{2}{3}} + 3^{\sqrt{x}} + 7 = 0$;

4) $x^{\log_3 x - 3} = 10000$.

Алгебралык теңдемелер төмөнкүдөй үч типке бөлүнөт:

1. Бүтүн алгебралык теңдемелер. Мындай теңдемелерде белгисиздин даражасы натуралдык сандар гана болот.

Мисалы: 1) $3x^4 + 5x - 7 = 12$;

2) $(x+5)(x-2) = 4x + 2$;

3) $\sqrt{3}x^2 - \frac{2}{5}x = 3x - 7$;

4) $\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{7} = 3$.

2. Бөлчөк рационалдык теңдемелер. Мындай теңдемелер бүтүн алгебралык теңдемелердин катыштарын камтыйт.

Мисалы: 1) $\frac{x^2+2}{x+4} + \frac{x+1}{x-2} = 5$;

2) $\frac{x^3-1}{x+7} = 3x^2 - 1$.

3. Иррационалдык теңдемелер. Мындай теңдемелерде, белгисиз тамыр белгисинин астында камтылат, белгисиздин даражасы рационалдык сан болот.

Мисалы: $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x+9}$;

$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=6$.

Белгисиз өзгөрмөнү камтыган барабарсыздыктар да алгебралык барабарсыздыктар жана трансценденттик барабарсыздыктар болуп эки типке бөлүнүшөт.

Мисалы: 1) $x^2+3x-2>0$;

2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-7}\geq 20$, *алгебралык барабарсыздыктар.*

3) $sinx+cosx>0$;

$2^x+log_2 x\leq 18$, *трансценденттик барабарсыздыктар.*

Силер окуп үйрөнгөн көрсөткүчтүү логарифмалык, тригонометриялык, модул ичинде белгисизи бар теңдемелер (барабарсыздыктар) трансценденттик теңдемелер (барабарсыздыктар) болушат.

Мисалы: 1) $4\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x+1}-18=0$;

2) $lg\,x^2+lg\,x+3=6$;

3)$tg^2x-5tg\,x+9=0$;

4) $|x+3|-|x-2|=5$;

5) $2\cdot 5^x-5^{2x}+1<0$;

6) $cos^2x-sin\,x+2>0$.

3.2. Иррационалдык теңдемелер. Алардын негизги түрлөрү жана чыгаруу усулдары.

Аныктама. *Белгисизди тамыр белгисинин астына камтыган же белгисиздин даражасы рационалдык бөлчөк сан болгон алгебралык теңдемелер иррационалдык теңдемелер деп аталат.*

Бул бөлүмдө ар түрдүү иррационалдык теңдемелерди чыгаруу усулдары менен таанышасыңар.

Кээ бир иррационалдык теңдемелер тең күчтүү өзгөртүп түзүүлөр менен келтирилип чыгарылат. Ал эми айрым иррационалдык теңдемелерди рационалдык теңдемелерге келтирбей эле чыгарууга болот.

Иррационалдык теңдемелерди чыгарууда төмөнкүлөрдү эске алуу зарыл:

1. Теңдеменин аныкталуу областын таап алуу, анткени анын аныкталуу областына тиешелүү сандар гана тамыр боло алат. Аныкталуу областын таппай эле чыгарсак да болот, мындай учурда табылган тамырларды теңдемеге коюп, текшерүү керек. Айрым учурда теңдеменин аныкталуу областын табуу мүмкүн болбой калышы да мүмкүн. Бул учурда теңдемелерди чыгарууда тең күчтүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп, тамырдын туура табылганын текшерип алабыз.

2. Иррационалдык теңдемелерди чыгарууда төмөндөгүлөрдү ар дайым билүү керек:

а) арифметикалык тамыр жана анын касиеттерин,

б) рационалдык көрсөткүчтүү даража жана анын касиеттерин,

в) кыскача көбөйтүүнүн формулаларын,

г) функциянын аныкталуу областын табууну,

д) рационалдык теңдемелерди чыгаруу жолдорун,

е) функиянын жуп, так жана монотондуулук касиеттерин.

<u>1. Арифметикалык тамырдын касиеттерин пайдалануу менен чыгаруучу иррационалдык теңдемелер.</u>

Мындай иррационалдык теңдемелерди чыгарууда арифметикалык тамырдын даражасынын жуп же тактыгы эске алынат.

$k \in N$ *саны жана* h *туюнтмасы үчүн:*

1) $\sqrt[2k]{h} = \begin{cases} \text{эгерде } h < 0 \text{ болсо, аныкталбайт,} \\ \text{эгерде } h = 0 \text{ болсо,} \quad 0, \\ \text{эгерде } h > 0 \text{ болсо} \quad > 0 \text{ болот.} \end{cases}$

$\sqrt[2k]{h} = q \geq 0$ *болсо,* $h = q^{2k}$. *(арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча)*

2) $\sqrt[2k+1]{h} = \begin{cases} \text{эгерде } h < 0 \text{ болсо, } < 0, \\ \text{эгерде } h = 0 \text{ болсо,} \quad 0, \\ \text{эгерде } h > 0 \text{ болсо } > 0. \end{cases}$

$\sqrt[2k+1]{h} = q$ *болсо,* $h = q^{2k+1}$ *(так даражалуу тамырдын касиети боюнча)*

3) Өздөрүнүн аныкталуу областарында $y = \sqrt[2k]{h}, \sqrt[2k+1]{h}$ *функциялары өсүүчү болот.*

1-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{x-2} = 3;$$

Чыгаруу: Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x-2\geq 0$ *үчүн* $\sqrt{x-2}\geq 0$, *демек теңдеменин сол жана оң жактары барабар. Теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=3^2,$

$x-2=9,$

$x=9+2=11.$

Жообу: $x=11.$

2-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[4]{x^2+1}=-5;$$

Чыгаруу: Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $x^2+1\geq 0$ *үчүн* $\sqrt[4]{x^2+1}\geq 0$ *болот. Демек, теңдеменин сол жана оң жактары барабар эмес.*

Ошондуктан бул теңдеменин тамыры жок.

Жообу: $x\in\emptyset.$

3-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x-5}+\sqrt[6]{10x+4}=5;$$

Чыгаруу: Бул теңдеменин аныкталуу областы $\sqrt{x-5}$ *туюнтмасынын аныкталуу областына барабар* $x-5\geq 0,\ x\geq 5.$ *Ушул аныкталуу областына тиешелүү* $x=6$ *санын тамыр катары текшерип көрөлү.*

$\sqrt[3]{6+2}+\sqrt{6-5}+\sqrt[6]{10\cdot 6+4}=2+1+2=5.$

Демек, $x=6$ *тамыр болот.*

Жообу: $x=6.$

4 – мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[4]{x(x-5)}=-7-x^2;$$

Чыгаруу: Бул теңдеменин сол жагында даражасы 4 болгон радикал, башкача айтканда $\sqrt[4]{x(x-5)}\geq 0$, *ал эми оң жагында* $-x^2-7<0$ *туюнтма. Теңдеменин оң жана сол жактары барабар эмес. Демек теңдеменин тамыры жок.*

Жообу: $x\in\emptyset.$

<u>2. Теңдеменин аныкталуу областын табуу жолу менен чыгаруу.</u>

5–мисал. $\sqrt[4]{27-x^3}-\sqrt{x-3}=\frac{x^2-x-6}{x^3+5}$ *теңдемесин чыгаргыла.*

Чыгаруу: Бул теңдеменин аныкталуу областы $27 - x^3 \geq 0$ *жана* $x - 3 \geq 0$, $x^2 - x - 6 \geq 0$ *барабарсыздыктарын канааттандырган сандар болот*

б.а. $27 - x^3 \geq 0$, $\quad x - 3 \geq 0$, $\quad x^2 - x - 6 \geq 0$,

$$-x^3 \geq -27, \qquad x \geq 3, \qquad (x+2)(x-3) \geq 0,$$

$$x^3 \leq 27, \qquad \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 3 \end{cases},$$

$$x \leq 3. \qquad x \geq 3$$

Демек, теңдеменин аныкталуу областы $x \geq 3$, $x \leq 3$ *мындан теңдеменин тамыры* $x = 3$ *экендиги келип чыгат.*

Жообу: $x = 3$.

6-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$\sqrt{x-5} - \sqrt{2-x} = 7;$$

Чыгаруу: Бул теңдеменин аныкталуу областы $x - 5 \geq 0$, $2 - x \geq 0$ *барабарсыздыктарын канааттандырган сандар башкача айтканда* $x \geq 5$, $x \leq 2$. *Бир эле учурда* x *мындай маанилерге ээ болбойт. Ошондуктан бул теңдеменин тамырлары жок.*

Жообу: $x \in \emptyset$.

3. Бир гана радикалы бар иррационалдык теңдемелерди чыгаруу.

Бир гана радикалы бар ирраионалдык теңдемелер жалпы учурда

$\sqrt[n]{g(x)} = q(x)$ *түрүндө жазылат.*

Мындай теңдемелерди чыгаруу үчүн берилген теңдеменин эки жагын тең n *– даражага көтөрүү керек. Ошондо биз төмөнкүдөй*

$g(x) = (q(x))^n$ *түрүндөгү рационалдык теңдемеге ээ болобуз.*

$\sqrt[2n]{g(x)} = q(x)$ *теңдемеси*

$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ g(x) = (q(x))^n \end{cases}$ *теңдемелер системасына тең күчтүү.*

7 – мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{5x-6} = x + 2;$$

Чыгаруу: Теңдеменин сол жагында квадрат тамыр тургандыктан, анын оң жагы $x + 2 \geq 0$ *болуш керек.*

Берилген теңдеме $\begin{cases}(\sqrt{5x+6})^2 = (x+2)^2 \\ x+2 \geq 0\end{cases}$ *системасына тең күчтүү:*

$\begin{cases}5x+6 = (x+2)^2 \\ x+2 \geq 0,\end{cases}$ $\begin{cases}5x+6 = x^2+4x+4 \\ x+2 \geq 0,\end{cases}$

Натыйжада $x^2 - x - 2 = 0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*

$D = 1 + 8 = 9 \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad x_1 = 2, \; x_2 = -1.$

Бул эки тамыр тең теңдемени канааттандырат.

Жообу: $x_1 = 2, \; x_2 = -1.$

8-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[3]{3x^2 - 10x + 8} + x = 2;$$

Чыгаруу: Адегенде радикалды жалгыздап алабыз $\sqrt[3]{3x^2 - 10x + 8} = 2 - x$ *теңдеменин эки жагын тең кубка* $(\sqrt[3]{3x^2 - 10x + 8})^3 = (2-x)^3,$ *көтөрөбүз.*

$3x^2 - 10x + 8 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3,$

$3x^2 - 10x + 8 - 8 + 12x - 6x^2 + x^3 = 0,$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0, \qquad x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x = 0; \quad x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 1.$

Жообу: $x_1 = 2; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 0.$

4. Бирдей даражалуу эки же андан көп радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.

А) Квадраттык радикалдарды камтыган иррационалдык теңдемелер.

9-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-5} = 2;$$

Чыгаруу: Бир радикалды теңдеменин сол жагына калтырып, экинчисин оң жагына алып өтөбүз.

$\sqrt{x^2+7} = 2 + \sqrt{x^2-5}$ *бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$(\sqrt{x^2+7})^2 = \left(2 + \sqrt{x^2-5}\right)^2$

$x^2 + 7 = 4 + 4\sqrt{x^2-5} + x^2 - 5$

$4\sqrt{x^2-5} = 8$

$\sqrt{x^2-5} = 2$ *бул теңдеменин да эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$x^2 - 5 = 4$

$$x^2 = 9$$
$$x_1 = -3; \ \ x_2 = 3$$
бул эки тамыр тең теңдемени канааттандырат.

Жообу: $x_1 = -3; \ \ x_2 = 3.$

10-мисал. Теңдемени чыгаргыла:
$$\sqrt{3x+16} - \sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+9} = 0.$$
Чыгаруу: Бул теңдеменин аныкталуу областын табабыз:
$$3x + 16 \geq 0, \quad 5x + 1 \geq 0, \quad 2x + 9 \geq 0.$$
$$x \geq -\frac{16}{3}; \quad x \geq -\frac{1}{5}; \quad x \geq -\frac{9}{2}$$
Демек, $x \geq -\frac{1}{5}$ *аныкталуу област болот. Радикалдардын бирин жалгыздап алалы.*

$$\sqrt{3x+16} - \sqrt{2x+9} = \sqrt{5x+1},$$
$$\left(\sqrt{3x+16} - \sqrt{2x+9}\right)^2 = \left(\sqrt{5x+1}\right)^2.$$
Эми теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз

$$3x + 16 - 2\sqrt{(3x+16)(2x+9} + 2x + 9 = 5x + 1,$$
$$5x + 25 - 2\sqrt{(3x+16)(2x+9} - 5x - 1 = 0,$$
$\sqrt{(3x+16)(2x+9} = 12,$ *дагы квадратка көтөрөбүз.*
$$6x^2 + 59x + 144 = 144,$$
$$6x^2 + 59x = 0, \quad x(6x+59) = 0,$$
$$x = 0, \quad 6x + 59 = 0$$
$x = -\frac{59}{6}; \quad x = -\frac{59}{6}$ *аныкталуу областка кирбейт.*

Жообу: $x = 0.$

11-мисал. Теңдемени чыгаргыла:
$$\sqrt{2x^2+5x+3} - \sqrt{2x^2+5x-8} = 1$$
Чыгаруу: $2x^2 + 5x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

(1) $\sqrt{t+3} - \sqrt{t-8} = 1,$ *теңдемесине ээ болобуз. Эми теңдеменин эки жагын тең анын түйүндөгүсүнө көбөйтөбүз.*
$$\left(\sqrt{t+3} - \sqrt{t-8}\right)\left(\sqrt{t+3} + \sqrt{t-8}\right) = $$
$$= \sqrt{t+3} + \sqrt{t-8},$$
$$t + 3 - t + 8 = \sqrt{t+3} + \sqrt{t-8},$$
(2) $\sqrt{t+3} + \sqrt{t-8} = 11$

(1) теңдемеге (2) теңдемени мүчөлөп кошобуз.
$$2\sqrt{t+3} = 12,$$
$\sqrt{t+3} = .6$ *теңдемесин алабыз, анын эки жагын тең*
$t + 3 = 36$ *квадратка көтөрөбүз.*

$t = 33.$

Демек, $2x^2 + 5x - 33 = 0$

$$D = 25 + 264 = 289$$

$x_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{289}}{4} = \frac{-5\pm17}{4}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{11}{2}$. *Бул эки тамыр тең теңдемени канааттандырат.*

Жообу: $\quad x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{11}{2}.$

Б) Кубдук радикалды камтыган иррационалдык теңдемелер.

12-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[3]{x+17} - \sqrt[3]{x-2} = 1.$$

Чыгаруу: Адегенде радикалдарды жалгыздап жайлаштыралы.

$\sqrt[3]{x+17} = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ *бул теңдеменин эки жагын*

$\left(\sqrt[3]{x+17}\right)^3 = \left(1 + \sqrt[3]{x-2}\right)^3$ *тең кубка көтөрөбүз.*

$$x + 17 = 1 + 3\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x-2} + x - 2$$

$3\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x-2} - 18 = 0$ *теңдемесине ээ болобуз 3кө*

$\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2 + \sqrt[3]{x-2} - 6 = 0$ *бөлүп коебуз.*

$\sqrt[3]{x-2} = y$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.*

$y^2 + y - 6 = 0, \qquad D = 1 + 24 = 25,$

$y_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm5}{2}, \quad y_1 = 2; \quad y_2 = -3.$

$$\sqrt[3]{x-2} = 2, \qquad \sqrt[3]{x-2} = -3,$$

$$\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 = 2^3, \qquad \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 = (-3)^3,$$

$$x - 2 = 8, \qquad x - 2 = -27,$$

$$x = 10. \qquad x = -25.$$

Жообу: $\quad x_1 = 10; \quad x_2 = -25.$

13-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$\sqrt[3]{11-x} + \sqrt[3]{24+x} = 5$$

Чыгаруу: $\sqrt[3]{11-x} = u$ *жана* $\sqrt[3]{24+x} = \vartheta$ *жаңы өзгөрмөлөрүн кийиребиз.*

u *жана* ϑ *белгисиздерине карата төмөндөгүдөй теңдемелер системасын алабыз.*

$\begin{cases} u + \vartheta = 5, \\ u^3 + \vartheta^3 = 35, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 5 - \vartheta, \\ (5-\vartheta)^3 + \vartheta^3 = 35, \end{cases}$

$125 - 75\vartheta + 15\vartheta^2 - \vartheta^3 + \vartheta^3 = 35,$

$15\vartheta^2 - 75\vartheta + 90 = 0,$

$\vartheta^2 - 5\vartheta + 6 = 0, \quad D = 25 - 24 = 1,$

$\vartheta_{1/2} = \frac{5\pm1}{2}, \quad \vartheta_1 = 3; \quad \vartheta_2 = 2.$

Демек, $u_1 = 5 - 3 = 2; \quad u_2 = 5 - 2 = 3.$

$\sqrt[3]{11-x} = 2,$	$\sqrt[3]{11-x} = 3,$	$\sqrt[3]{24+x} = 3$	$\sqrt[3]{24+x} = 2$
$11 - x = 8,$	$11 - x = 27,$	$24 + x = 27$	$24 + x = 8$
$x = 3.$	$x = -16.$	$x = 3$	$x = -16.$

Жообу: $x_1 = 3, \; x_2 = -16.$

В) Төртүнчү даражалуу радикалдары бар иррационал-дык теңдемелер.

Мындай теңдемелерди чыгарууда анын эки жагын удаа квадратка көтөрүү жана жаңы өзгөрмөнү кийирүү методдору колдонулат.

14-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[4]{14+x} + \sqrt[4]{3-x} = 3;$$

Чыгаруу: Теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.

$\left(\sqrt[4]{14+x} + \sqrt[4]{3-x}\right)^2 = 3^2,$

$\sqrt{14+x} + 2\sqrt[4]{(14+x)(3-x)} + \sqrt{3-x} = 9,$

$\sqrt{14+x} + \sqrt{3-x} = 9 - 2\sqrt[4]{(14+x)(3-x)},$ *дагы квадратка*

$\left(\sqrt{14+x} + \sqrt{3-x}\right)^2 = \left(9 - 2\sqrt[4]{(14+x)(3-x)}\right)^2,$ *көтөрөбүз*

$14 + x + 2\sqrt{(14+x)(3-x)} + 3 - x =$

$= 81 - 36\sqrt[4]{(14+x)(3-x)} + 4\sqrt{(14+x)(3-x)},$

$-2\sqrt{(14+x)(3-x)} + 36\sqrt[4]{(14+x)(3-x)} - 64 = 0,$

$\sqrt{(14+x)(3-x)} - 18\sqrt[4]{(14+x)(3-x)} + 32 = 0,$

$\sqrt[4]{(14+x)(3-x)} = u$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.*

$u^2 - 18u + 32 = 0,$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*

$D = 324 - 128 = 196,$

$u_{1/2} = \frac{18\pm\sqrt{196}}{2} = \frac{18\pm14}{2}, \quad u_1 = 16; \quad u_2 = 2.$

Демек, $\sqrt[4]{(14+x)(3-x)} = 2$ *4-даражага көтөрөбүз.*
$(14+x)(3-x) = 16,$
$x^2 + 11x - 26 = 0,$ *квадраттык теңдемеси келип чыгат.*
$D = 121 + 104 = 225,$
$x_{1/2} = \frac{-11\pm\sqrt{225}}{2} = \frac{-11\pm15}{2},$ $x_1 = 2;$ $x_2 = -13.$ *Бул эки тамыр тең теңдемени канааттандырат.*

Жообу: $x_1 = 2;$ $x_2 = -13.$

Г) Бешинчи жана андан жогорку даражалуу радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.

Мындай иррационалдык теңдемелердин жөнөкөйлөрүн, анын эки жагын тең бирдей даражага төтөрүү жолу менен чыгарабыз.

15-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[10]{x^2+2x} = \sqrt[10]{10-x};$$

Чыгаруу: Теңдеменин эки жагын тең 10-даражага көтөрөбүз. Аныкталуу областын табабыз.

$x^2 + 2x \geq 0$ *жана* $10 - x \geq 0$

демек $x \in (-\infty; -2) \cup [0; 10];$

$\left(\sqrt[10]{x^2+2x}\right)^{10} = \left(\sqrt[10]{10-x}\right)^{10},$
$x^2 + 2x = 10 - x,$
$x^2 + 3x - 10 = 0,$ $D = 9 + 40 = 49,$
$x_{1/2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-3\pm7}{2},$ $x_1 = 2;$ $x_2 = -5$ *бул эки тамыр тең аныкталуу областка тиешелүү.*

Жообу: $x_1 = 2;$ $x_2 = -5.$

5. <u>Ар түрдүү даражадагы радикалдары бар иррационалдык теңдемелер.</u>

16-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt[3]{x+5};$$

Чыгаруу: Бул теңдеменин аныкталуу областы $x \geq -1$. *Теңдеме 2- жана 3-даражадагы радикалдарды камтыгандыктан, анын* *эки жагын тең 2 менен 3 түн эң кичине бөлүнүүчүсү 6-даражага көтөрөбүз.*

$\left(\sqrt{x+1}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{x+5}\right)^6,$

$(x+1)^3 = (x+5)^2,$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 10x + 25,$

$x^3 + 2x^2 - 7x - 24 = 0.$ *Виеттин теоремасы боюнча* -24 *түн бөлүүчүлөрүнүн бири бул теңдеменин тамыры болот. Ошондуктан* $x = 3$ *бул теңдеменин бир тамыры болот. Безунун теоремасы боюнча* $x^3 + 2x^2 - 7x - 24$ *көп мүчө* $x - 3$ *кө калдыксыз бөлүнөт.*

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 + 2x^2 - 7x - 24 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + 5x + 8 \\
0 \quad -\,5x^2 - 7x & \\
\underline{5x^2 - 15x} & \\
0 \quad -\,8x - 24 & \\
\underline{8x - 24} & \\
0 &
\end{array}
$$

Демек, $x^3 + 2x^2 - 7x - 24 = (x-3)(x^2+5x+8)$

$(x-3)(x^2+5x+8) = 0$

$x - 3 = 0,\ \ x = 3;$

$x^2 + 5x + 8 = 0,\qquad D = 25 - 32 = -7 < 0$ *болгондуктан бул теңдеменин тамыры жок.*

Жообу: $x = 3.$

17-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt[6]{5-x} = \sqrt[12]{x-3};$$

Чыгаруу: Аныкталуу областын (АОну) табабыз.

$5 - x \geq 0, \qquad x - 3 \geq 0,$

$x \leq 5. \qquad\qquad x \geq 3.$

Демек, АО $3 \leq x \leq 5$ *болот.*

Эми теңдеменин эки жагын тең 6 менен 12 нин эң кичине бөлүнүүчүсү 12-даражага көтөрөбүз.

$\left(\sqrt[6]{5-x}\right)^{12} = \left(\sqrt[12]{x-3}\right)^{12},$

$(5-x)^2 = x - 3,$

$25 - 10x + x^2 = x - 3,$

$x^2 - 11x + 28 = 0, \qquad D = 121 - 112 = 9,$

$x_{1/2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2}$, $x_1 = 4$; $x_2 = 7$ *бул тамырлардын бири* $x_1 = 4$ *аныкталуу областка тиешелүү,* $x_2 = 7$ *кирбейт.*

Жообу: $x = 4$.

6. <u>Ар түрдүү туюнтмалардын көбөйтүндүсүнөн турган иррационалдык теңдемелер.</u>

Мындай теңдемелер көбөйтүүчүлөргө ажыратуу жолу менен чыгарылат. Бул төмөнкү теоремага негизделет.

Теорема 1. Эгерде $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ *теңдемелеринин ар бири* $A \in R$ *болгон* A *көптүгүндө аныкталган болсо, анда бул көптүктө*

$f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x) = 0, \quad n \in N$

теңдемеси, төмөнкү теңдемелердин жыйындысына тең күчтүү:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ ----, \\ f_n(x) = 0 \end{array}\right.$$

бул теңдемелердин жыйындысын төмөндөгүдөй жазсак да болот. $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$.

18-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{(x^2-4)} \cdot \sqrt{x^2-5x-6} = 0;$$

Чыгаруу: Радикалдардын алдындагы туюнтмаларды көбөйтүүчүлөргө ажыратып алабыз.

$$\sqrt{(x-2)(x+2)} \cdot \sqrt{(x+1)(x-6)} = 0$$

Аныкталуу областы табабыз

$$x-2 \geq 0, \quad x+2 \geq 0, \quad x+1 \geq 0, \quad x-6 \geq 0,$$

Мындан $x \geq 2$, $x \geq -2$, $x \geq -1$ *жана* $x \geq 6$.

Демек, аныкталуу областы $x \geq 6$, *2-учур үчүн* $x \leq -2$, *б.а.* $x \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$;

Теорема боюнча

$\sqrt{(x-2)(x+2)} = 0$,	$\sqrt{(x+1)(x-6)} = 0$,
$(x-2)(x+2) = 0$,	$(x+1)(x-6) = 0$,
$x-2=0$, $x_1 = 2$,	$x+1=0$, $x_3 = -1$,
$x+2=0$, $x_2 = -2$,	$x-6=0$, $x_4 = 6$,

Бул табылган төрт тамырдан $x = -2$, $x = 6$ гана аныкталуу областка таандык.

Жообу: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$.

19-мисал. Тѐңдемени чыгаргыла.

$(x-1)\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1} = 0;$

Чыгаруу: Бул теңдеменин $A.O.$ *сы*

$x \geq 1$ *башкача айтканда* $x \in [1; +\infty)$

Теңдемени төмөнкүдөй өзгөртүп түзөбүз:

$$(x-1)\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1} = 0.$$

$$\sqrt{x-1}\left(x-1-\sqrt{x+1}\right) = 0.$$

Теорема боюнча

$\sqrt{x-1} = 0,$
$x-1 = 0,$
$x = 1.$

$-\sqrt{x+1} = 1-x,$
$x+1 = 1-2x+x^2,$
$x^2-3x = 0,$
$x(x-3) = 0,$
$x = 0,\ x-3 = 0,$
$x = 3.$

Табылган $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ *тамырларынын ичинен* $x = 1$, *жана* $x = 3$ *тамырлары* $A.O.$ *ка тандык.*

Жообу: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

7. Иррационалдык теңдемелердин $f(f(x)) = x$ түрүндө берилиши.

Мындай иррационалдык теңдемени чыгаруу үчүн суперпозиция методу колдонулат.

Суперпозиция-татаал аргументүү, функциядан функция дегенди билдирет.

2-теорема. Эгерде $y = f(x)$ *функциясы монотон-дуу өсүүчү болсо, анда* $f(x) = x$ *жана* $f(f(x)) = x$ *теңдемелери тең күчтүү болот.*

Теңдемелерди чыгарууда ушул теореманы колдонуу, суперпозиция методу деп аталат.

20-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$\sqrt{3+\sqrt{x}} = x-3.$$

Чыгаруу: Теңдеменин аныкталуу областы $x \geq 0$ *жана* $x \geq 3$ *демек,* $A.O.$ $x \geq 3$, $x \in [3; +\infty)$.

Теңдемени чыгарууда суперпозиция методун колдонобуз. Ал үчүн $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ *функциясынын монотондуулугун карап чыгабыз.*

$f'(x) = \left(3 + \sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ *демек, функция өсүүчү. Анда* $f\left(f(x)\right) = x$ *башкача айтканда*

$f\left(f(x)\right) = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{x}}$ *2-теореманын негизинде*

$3 + \sqrt{x} = x$ *болот.*

$x - \sqrt{x} - 3 = 0$

$\sqrt{x} = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.*

$t^2 - t - 3 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*

$D = 1 + 12 = 13,\ t_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2},\ t_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}.$

Демек, $\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2},$

$x = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{13}+13}{4} = \frac{14+2\sqrt{13}}{4} = \frac{7+\sqrt{13}}{2}.$

Табылган тамыр А.О.ка тиешелүү.

Жообу: $x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}.$

21-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$2 \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{3}} = 3x$$

Чыгаруу: Теңдеменин А.О.ты $x \geq 0,\ x \in [0; +\infty).$

2-теореманын негизинде

$f(x) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right)$ *деп алабыз.*

Демек, $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right) = x$ *болот.*

$2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 3x,$

$3x - 2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 0,$

$\sqrt[4]{x} = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.*

$3t^4 - 2t^2 - t = 0$ *теңдемесин алабыз.*

$t\left(3t^3 - 2t \quad - 1\right) = 0$ *мындан*

$t = 0$ *жана* $3t^3 - 2t \quad - 1 = 0$ *кубдук теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин тамырын Виеттин теоремасы боюнча анын бош мүчөсүнүн бөлүүчүлөрүнүн арасынан издейбиз. Бош мүчө 1ге барабар. Анын бир гана бөлүүчүсү бар. Ал 1. Демек,* $t_2 = 1,$ $t_1 = 0$

$\sqrt[4]{x} = 1, \quad \sqrt[4]{x} = 0,$

$x = 1. \quad x = 0. \quad$ *Жообу:* $x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$

8. Функционалдык метод жана график менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.

Функциялардын касиеттерин (монотондуулугун, так же жуптугун, чектелүүсүн) пайдаланып, берилген теңдемени чыгарууну функционалдык метод деп атайбыз.

Теңдемени график жолу менен чыгарууну силер мурда таанышкансыңар. Берилген теңдемени $f_1(x) = f_2(x)$ *түрүндө жазып,* $y = f_1(x)$ *жана* $y = f_2(x)$ *функцияларынын графиктерин чийебиз. Бул эки функциянын графиктеринин кесилишкен чекиттеринин абсциссалары берилген теңдеменин тамырлары болот. Графиктер кесилишпесе теңдеменин чыгарылышы жок болот.*

22-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$2\sqrt{x} + \sqrt[5]{27x} = 9;$$

Чыгаруу: Теңдеменин А.О.: $x \geq 0.$

Бул теңдеменин сол жагы $x \geq 0$ *маанилеринде өсүүчү функция, демек ал өзүнүн ар бир маанисин бир эле жолу алат.* $x = 9$ *берилген теңдеменин тамыры боло тургандыгын текшерип көрөлү.*

$$2\sqrt{9} + \sqrt[5]{27 \cdot 9} = 2 \cdot 3 + 3 = 9 \text{ демек } x = 9 \text{ тамыр болот.}$$

Жообу: $x = 9.$

23-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$\sqrt{x} = \frac{21}{x-2};$$

Чыгаруу: Теңдеменин А.О.ты $x > 2.$

Эгерде $f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \frac{21}{x-2}$ *бул функциялар аныкталуу областта төмөнкү теореманын шартын канааттандырат.*

3-теорема. Эгерде $f_1(x) = f_2(x)$ *теңдемесиндеги* $y = f_1(x)$ *жана* $y = f_2(x)$ *функцияларынын бири А.О.до өсүүчү, ал эми экинчиси кемүүчү болсо, анда бул теңдеменин бир гана тамыры болот, же тамыры жок болот.*

$f_1(x)$ *өсүүчү функция,* $f_2(x)$ *кемүүчү функция.*

Берилген теңдеменин тамыры $x = 9$ *экендигин текшерүү керек.*

$\sqrt{9} = 3, \quad \frac{21}{9-2} = \frac{21}{7} = 3.$

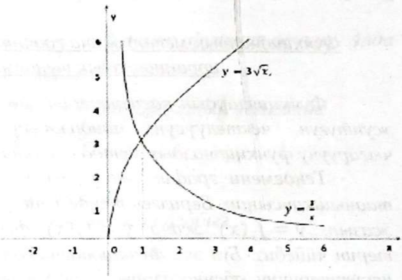
Демек, $x = 9$ *тамыр болот.*

Жообу: $x = 9$.

23. *Теңдемени графиктик жол менен чыгаргыла.*

$$3\sqrt{x} = \frac{3}{x};$$

Чыгаруу:
Теңдеменин А.О. ты $x > 0$.



15-сүрөт

Эгерде $f_1(x) = 3\sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{3}{x}$ *десек, анда алардын графиктерин схемалык түрдө чийип алабыз. Графиктердин кесилишкен чекитинин абсциссасы* $x = 1$.
Демек, берилген теңдеменин тамырыда 1 болот.

Жообу: $x = 1$.

9. Пропорциянын касиеттерин колдонуу методу менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.

Пропорциянын төмөнкү эки касиетин келтирели.
1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *пропорциясынан 2)* $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ *жана 3)* $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ *пропорцияларын алууга болот.*
Мында 2) жана 3) пропорциялар туунду пропорциялар деп аталат.
2) жана 3) пропорциялардын сол жана оң жактары тиешелүү түрдө өз ара тескери чоңдуктар.
2) жана 3) пропорциялар иррационалдык теңдемелерди чыгарууда көп колдонулат.
24 – мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{3x}+1}{\sqrt{3x}-1}.$$

Чыгаруу: Берилген теңдемесини 1) пропорция катары эсептеп, аны 2) пропорцияга келтиребиз.

$$\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}-\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{3x}+1+\sqrt{3x}-1}{\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x}+1},$$

$\frac{2\sqrt{2x+3}}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2\sqrt{3x}}{2}$, $\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{4-x}} = \sqrt{3x}$ *алынган теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$\left(\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{4-x}}\right)^2 = (\sqrt{3x})^2$, $\quad \frac{2x+3}{4-x} = 3x.$

$2x + 3 = 3x(4 - x),$

$2x + 3 = 12x - 3x^2,$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$, *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*

$D = 100 - 36 = 64$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6};\quad x_1 = 3;\quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Текшерип көрсөк $x_1 = 3$ *теңдеменин тамыры болот,*

$x_2 = \frac{1}{3}$ *чет тамыр.*

Жообу: $x = 3;$

10. <u>Татаал радикалдардан турган иррационалдык теңдемелер.</u>

Мындай теңдемелерди теңдеменин эки жагын тең удааыш бир нече жолу даражага көтөрүү методу менен чыгарабыз.

25-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{5 - \sqrt{x}}} = 1.$$

Чыгаруу: Берилген теңдеме татаал радикалдуу теңдеме. Аны удаасы менен үч жолу даражага көтөрүү методун пайдаланып чыгарабыз.

$\left(\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{5 - \sqrt{x}}} = 1\right)^4 = 1^4,$

$1 + \sqrt[3]{5 - \sqrt{x}} = 1 \quad \sqrt[3]{5 - \sqrt{x}} = 0,$

$\left(\sqrt[3]{5 - \sqrt{x}}\right)^3 = 0,$

$5 - \sqrt{x} = 0,\ \sqrt{x} = 5,$

$(\sqrt{x})^2 = 5^2, \quad x = 25.$

Текшерип көрсөк $x = 25$ *теңдеменин тамыры экендиги келип чыгат.*

Жообу: $x = 25.$

11. Толук квадратты бөлүп алуу менен чыгарылуучу иррационалдык теңдемелер.

Квадраттык үч мүчөдөн толук квадратты бөлүп алууну силер 9-класста үйрөнгөнсүңөр.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a};$$

Толук квадратты бөлүп алуу методу менен иррационалдык теңдемелерди чыгарууну үйрөнөбүз.

26-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$x^4-2x^2+x-2\sqrt{x}+2=0.$$

Чыгаруу: Теңдеменин $A.O.$ *ты* $x\geq 0.$

Теңдемени төмөндөгүдөй өзгөртүп түзөбүз.

$$\left(x^4-2x^2+1\right)+\left(x-2\sqrt{x}+1\right)=0$$
$$(x^2-1)^2+(\sqrt{x}-1)^2=0.$$

Демек, $\begin{cases}(x^2-1)^2=0\\(\sqrt{x}-1)^2=0\end{cases}$, $\begin{cases}|x^2-1|=0\\|\sqrt{x}-1|=0.\end{cases}$

системасына ээ болобуз. Анын биринчи теңдемесинен

$$x^2-1=0,\quad x^2=1,\quad x_1=1,\quad x_2=-1.$$

экинчи теңдемесинен

$$\sqrt{x}-1=0,\ (\sqrt{x})^2=1^2,\qquad x=1.$$

Бул табылган үч тамырдан $x=-1$ $A.O.$ *ка кирбейт.* $x=1$ *тамыр болот.*

Жообу: $x=1.$

27 – мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}=3$$

Чыгаруу: Берилген теңдемени төмөндөгүдөй жазып алабыз.

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}=3$$

же $|x-1|+|x+2|=3$ *эки терс эмес сандын суммасы 3кө барабар болуш үчүн алардын ар бири 3 төн ашпашы керек.*

Демек, $\begin{cases}|x-1|\leq 3\\|x+2|\leq 3\end{cases}$ *модулдун дагы бир касиетин эске алабыз*

$$\begin{cases}-3\leq x-1\leq 3\\-3\leq x+2\leq 3\end{cases},\quad\begin{cases}-2\leq x\leq 4\\-5\leq x\leq 1\end{cases},\quad -2\leq x\leq 1.$$

Жообу: $x\in[-2;1].$

12. Параметрлүү иррационалдык теңдемелер.

Параметрлүү ирраионалдык теңдемелерде белгисизден башка бир же бир нече параметрлер болот.

Параметрдүү теңдемелерди чыгарууда иррационалдык теңдемелерди чыгаруунун бардык методдорун колдонууга болот. Анын чыгарылышы бар же жок экендиги теңдемедеги параметрлерге байланыштуу болот.

28-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}} = \frac{x}{2a}$;

Чыгаруу: Берилген параметрдик теңдемени пропорция катары эсептеп, пропорциянын $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ *касиетин пайдалануу менен чыгарабыз. А.О.ты* $x \geq 2a,\ a \neq 0,\ a > 0$;

$$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}-\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}} = \frac{x+2a}{x-2a}$$

$-\frac{\sqrt{x+2a}}{\sqrt{x-2a}} = \frac{x+2a}{x-2a}$, *бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{x^2+4ax+4a^2}{x^2-4ax+4a^2}$ *рационалдык теңдемесин алабыз.*

$$x^3 - 4ax^2 + 4a^2x + 2ax^2 - 8a^2x + 4a^3 =$$
$$= x^3 + 4ax^2 + 4a^2x - 2ax^2 - 8a^2x - 8a^3,$$
$$-4ax^2 = -16a^3,$$
$$x^2 = 4a^2,$$
$$x = 2|a|.$$

Жообу: $x = 2|a|$.

13. Иррационалдык теңдемелердин системалары.

Иррационалдык теңдемелердин системаларын, рационалдык теңдемелерди чыгаруудагы колдонулган кошуу жолу, ордуна коюу жолу, жаңы өзгөрмөнү киирүү жолдорун пайдалануу менен чыгарабыз.

29-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$$

Чыгаруу: Системанын 1-теңдемесинин эки жагын тең 3 кө көбөйтөбүз.

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 12, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$$ *1- жана 2- теңдемени кошобуз.*

$$\begin{array}{r} -\ 3\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 12 \\ \underline{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18} \\ 5\sqrt{x} = 30 \end{array}$$ *тендемесин алабыз*

$\sqrt{x} = 6,\ (\sqrt{x})^2 = 6^2,\ x = 36.$

$x = 36$ *маанисин 2-теңдемеге коюп y ти табабыз.*

$2\sqrt{36} + 3\sqrt{y} = 18,$

$3\sqrt{y} = 18 - 12,$

$3\sqrt{y} = 6,$

$\sqrt{y} = 2,\quad (\sqrt{y})^2 = 2^2,\ y = 4.$

Жообу: $x = 36,\ y = 4.$

30-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$$

Чыгаруу: Системанын 2-теңдемеден $\sqrt{x}$ *ти* $\sqrt{y}$ *аркылуу туюнтуп алабыз.*

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} = 5 - \sqrt{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30, \\ \sqrt{x} = 5 - \sqrt{y}; \end{cases}$$

$(5 - \sqrt{y})\sqrt{y}\cdot 5 = 30,$ *ордуна коюу методун пайдаландык.*

$5\sqrt{y} - y = 6,\ \ y - 5\sqrt{y} + 6 = 0.$

$\sqrt{y} = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кииребиз.*

$t^2 - 5t + 6 = 0;$

$t_1 = 3\ ,\quad t_2 = 2.$

$$\sqrt{y} = 3,\ y_1 = 9,\quad \sqrt{x} = 5 - 3 = 2,\ x_1 = 4;$$
$$\sqrt{y} = 2,\ y_2 = 4,\quad \sqrt{x} = 5 - 2 = 3,\ x_2 = 9;$$

Жообу: (4;9); (9;4).

31. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}; \end{cases}$$

Чыгаруу: $\sqrt{x^2 - 3y - 1} = u,\ \ \sqrt{x + 6y} = \vartheta$ *жаңы өзгөрмөлөрүн кииребиз.*

$$\begin{cases}5u + \vartheta = 19,\\ 3u - 2\vartheta = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}10u + 2\vartheta = 38,\\ 3u - 2\vartheta = 1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}5u + \vartheta = 19,\\ 3u - 2\vartheta = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}10u + 2\vartheta = 38, & \textit{1-теңдемеге}\\ 3u - 2\vartheta = 1, & \textit{2-теңдемени кошобуз}\end{cases}$$

$$13u = 39,$$
$$u = 3,$$
$$\vartheta = 19 - 5 \cdot 3 = 19 - 15 = 4. \quad \vartheta = 4.$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 3,\\ \sqrt{x + 6y} = 4,\end{cases} \quad \begin{cases}x^2 - 3y - 1 = 9,\\ x + 6y = 16,\end{cases}$$

Экинчи теңдемеден y ти x аркылуу туюнтуп алабыз, аны 1-теңдемеге коебуз.

$$y = \frac{16 - x}{6};$$
$$x^2 - 3 \cdot \frac{16-x}{6} - 1 = 9,$$
$$2x^2 + x - 36 = 0,$$
$$x_1 = -\frac{9}{2}; \quad y_1 = \frac{41}{12},$$
$$x_2 = 4; \quad y_2 = 2.$$

Жообу: $\left(-\frac{9}{2}; \frac{41}{12}\right)$, *(4;2).*

3.3. Иррационалдык барабарсыздыктар жана аларды чыгаруу жолдору.

1-аныктама. Белгисизди тамыр астына камтыган барабарсыздыктар иррационалдык барабарсыздыктар деп аталат.

Мисалы: $\sqrt{x} + \sqrt{2x + 1} > 3x - 1; \quad \sqrt[3]{5x + 1} < \sqrt{2x - 1}$

2-аныктама. Барабарсыздыкты туура сан барабарсыздыгына же теңдештикке айландырган белгисиз чоңдуктун мааниси анын чыгарылышы деп аталат.

Барабарсыздыкты чыгаруу деп, аны канааттандырган сандардын көптүгүн табууну же чыгарылышы жок экендигин далилдөөнү айтабыз.

Иррацоналдык барабарсыздыктарды чыгарууда негизинен төмөндөгү методдор колдонулат:

1) аныкталуу областын табуу;

2) арифметикалык тамырдын касиеттерин колдонуу;
3) даражага көтөрүү;
4) жаңы өзгөрмө кийирүү;
5) толук квадратты бөлүп алуу;
6) графиктик жол менен чыгаруу.

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла.

$$\sqrt{x-5} > -7;$$

Чыгаруу: Бул барабарсыздыктын А.О.ты $x-5 \geq 0,\ x \geq 5$ *б.а.* $x \in [5; +\infty)$.

Арифметикалык тамырдын касиети боюнча $\sqrt{x-5} \geq 0$ *болот. Барабарсыздыктын сол жагы* $-7 < 0$ *б.а. терс сан. Ошондуктан барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү анын А.О.ты менен дал келет.*

Демек, чыгарылыш көптүгү $[5; +\infty)$ *болот.*

Жообу: $x \in [5; +\infty)$.

2-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла.

$$\sqrt[10]{7-x} + \sqrt{x+3} > \sqrt{x-7};$$

Чыгаруу: Барабарсыздыктын А.О.тын табабыз.
А.О. $7-x \geq 0,\quad x+3 \geq 0,\quad x-7 \geq 0$
барабарсыздыктардын чыгарылыш көптүгү менен дал келет.
б.а. $x \leq 7,\ x \geq -3,\quad x \geq 7$ *мындан* $x = 7$ *экендиги келип чыгат.* *Жообу:* $x = 7$.

Барабарсыздыктарды чыгарууда мындан ары төмөнкү кыскартууларды колдонобуз:
1) БАО-барабарсыздыктын аныкталуу областы;
2) БСЖ-барабарсыздыктын сол жагы;
3) БОЖ-барабарсыздыктын оң жагы;
4) СЖ-сол жагы;
5) ОЖ-оң жагы.

Жуп даражалуу иррационалдык барабарсыздыктар. Мындай барабарсыздыктар төмөнкүдөй төрт түрдө кездешет.
А) БАОдо эки жагы тең терс эмес.
Мисалы, $\sqrt[4]{x^2+1} \geq \sqrt[6]{x-5}$.
Б) БАОдо эки жагы тең терс.
Мисалы, $-\sqrt{x-3} \leq -\sqrt[4]{x+2} - \sqrt{x-1}$.
В) БАОдо барабарсыздыктын СЖнын белгиси аныкталбаган, ал эми ОЖ ≥ 0.

Мисалы, $5x \geq \sqrt{x^2 + x - 4}$.

Г) БАОдо барабарсыздыктын СЖ ≥ 0, *ал эми ОЖнын белгиси аныкталбаган.*

Мисалы, $\sqrt{x+5} \geq x - 1$.

1-теорема. *Эгерде БАОдо* $f_1(x) \geq 0$ *жана* $f_2(x) \geq 0$ *болсо, анда* $f_1(x) \geq f_2(x)$ *барабарсыздыгы* $(f_1(x))^{2x} \geq (f_2(x))^{2x}$ *барабарсыздыгына тең күчтүү болот.*

Бул теорема А) түрүндөгү барабарсыздыктарды чыгарууда колдонулат.

Б) түрү эки жагын тең (-1)ге көбөйтүү менен А) түрүнө келтирилет.

3-мисал. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-3}$ *барабарсыздыгын чыгаргыла.*

Чыгаруу: Арифметикалык тамырдын касиети боюнча барабарсыздыктын эки жагы тең терс эмес.

Демек, 1-теореманы колдонууга болот;

СЖнын АОты $x + 3 \geq 0$, $x \geq -3$;

ОЖнын АОты $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$.

Демек, БАО $x \geq 3$.

Барабарсыздыктын эки жагын тең квадратка көтөрөбүз

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 > \left(\sqrt{x-3}\right)^2$$

$$x + 3 > x - 3$$

Мындан төмөнкүгө ээ болобуз.

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x + 3 > x - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ 3 > -3, \end{cases}$$

БАОнун шарты канааттандырылды. $x \geq 3$

Жообу: $x \geq 3$.

4-мисал. Барабарсыздыкты чыгарыгыла.

$$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} < 2;$$

Чыгаруу: 1-теореманын негизинде барабарсыздыктын эки жагын тең квадратка көтөрүп, $\frac{x-3}{x+3} < 4$ *рационалдык барабарсыздыгын алабыз.*

Интервалдар методун колдонуп, БАО $(3; +\infty)$ *көптүгү экендигин табабыз.*

Рационалдык барабарсыздыктын чыгарылышы $(-5; +\infty)$ *экендигин табабыз.*
Анда барабарсыздыктын чыгарылышы.

Жообу: $(-5; +\infty) \cap (3; +\infty) = (3; +\infty)$.

2-теорема. *Берилген* $f_1(x) \geq \sqrt[2k]{f_2(x)},\ k \in N$ *барабарсыздыгы төмөнкү рационалдык барабарсыздык-тардын системасына тең күчтүү:*

$$\begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ (f_1(x))^{2k} \geq f_2(x). \end{cases}$$

Эскертүү: Эгерде $f_1(x) < 0$ *болсо,* $f_1(x) > \sqrt[2k]{f_2(x)}$ *барабарсыздыгынын чыгарылышы жок.*

5-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$\sqrt{3x+4} \leq x.$$

Чыгаруу: 2-теореманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 3x+4 \geq 0, \\ 3x+4 \leq x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -\dfrac{4}{3}. \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0, \end{cases}$$

Берилген барабарсыздыкты квадратка көтөрөбүз.

$x^2 - 3x - 4 \geq 0,$

$(x+1)(x-4) \geq 0$ *интервалдар методун колдонуп, бул барабарсыздыктын чыгарылышы* $[4; +\infty)$ *экендигин табабыз.*

Жообу: $x \geq 4$.

6-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла

$$x - 2 \geq \sqrt{x^2 - 3x}.$$

Чыгаруу: 2-теореманы колдонуп, барабарсыздыкты квадратка көтөрөбүз.

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 3x \geq 0, \\ (x-2)^2 \geq \left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq 0, \quad x \geq 3 \\ x^2 - 4x + 4 \geq x^2 - 3x, \ x \leq 4. \end{cases}$$

Демек, барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $3 \leq x \leq 4$ *болот.*

Жообу: $x \in [3; 4]$

3-теорема. *Берилген* $\sqrt[2x]{f_1(x)} \geq f_2(x)$ *барабарсыздыгы раионалдык барабарсыздыктардын төмөнкү жыйындысына тең күчтүү:*

а) $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x) = (f_2(x))^2 \end{cases}$ *жана* $\begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \end{cases}$

7 – мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$\sqrt{x-6} > x;$$

Чыгаруу: 3 – теореманы колдонсок.

$$\begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ \left(\sqrt{x+6}\right)^2 \geq x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -6, \\ x \geq 0, \\ x+6 > x^2 \end{cases},$$

$x+6 > x^2$, $x^2 - x - 6 < 0$ *интервалдар методун колдонуп* $-2 < x < 3$ *экендигин табабыз. Жогорку системадагы шарттарды пайдаланып барабарсыздыктын чыгарылышы* $0 \leq x < 3$ *боло тургандыгын билебиз.*

Жообу: $x \epsilon [0; 3)$.

4-теорема. *Берилген* $f_1(x) > f_2(x)$ *барабарсыздыгы* $\sqrt[2x+1]{f_1(x)} \geq \sqrt[2x+1]{f_2(x)}$ *барабарсыздыгына тең күчтүү.*

8-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} < x - 2;$

Чыгаруу: БАО: $x \epsilon R$*,4 – теореманы колдонуп, барабарсыздыктын эки жагын тең кубка көтөрөбүз.*

$\left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}\right)^3 < (x-2)^3,$

$x^3 - 6x^2 < x^3 - 6x^2 + 12x - 8,$

$-12x < -8,$

$x > \frac{2}{3};$

Жообу: $x \epsilon \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

9-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла.

$$\frac{2-x}{\sqrt{4-x}} < 1.$$

Чыгаруу: Бул барабарсыздыкты жаңы өзгөрмөнү киирүү методу менен чыгарабыз.

$\sqrt{4-x} = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кииребиз.*

x *ти* t *аркылуу туюнтуп алабыз.*

$\left(\sqrt{4-x}\right)^2 = t^2$, $4 - x = t^2$, , $x = 4 - t^2$ *болот. Анда берилген барабарсыздык төмөнкүдөй түргө келет.*

$$\frac{2-(4-t^2)}{t} < 1, \ t > 0,$$
$$2-(4-t^2) < t,$$
$$2-4+t^2 < t, \qquad t^2 - t - 2 < 0, \quad \begin{cases}(t-2)(t+1) < 0 \\ t > 0.\end{cases}$$

интервалдар методун колдонуп $t \in (0; 2)$ *табабыз.*
анда $t^2 \in (0; 4)$ *болот.*
$x = 4 - t^2$ *экендигин эске алсак, анда* $x \in (0; 4)$ *болот.*

Жообу: $x \in (0; 4)$.

10-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$x - 5\sqrt{x} - 6 > 0.$$

Чыгаруу: $\sqrt{x} = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киййребиз.*

$\begin{cases}t^2 - 5t - 6 > 0 \\ t \geq 0\end{cases}$, *рационалдык барабарсыздыгын алабыз.*

$\begin{cases}(t+1)(t-6) > 0 \\ t \geq 0\end{cases}$ *эми интервалдар методун колдонуп*

$t > 6$ *экендигин табабыз.*
$\sqrt{x} = t$ *демек.* $\sqrt{x} > 6, \quad x > 36;$

Жообу: $x > 36$.

Барабарсыздыктарды чыгаруу.

3.3. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

91. Барабарсыздыктарды чыгаргыла.

а) $\sqrt[4]{x-7} > -3;$ б) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-5} \geq \sqrt{5-3x}$

92. Барабарсыздыкты чыгаргыла.

а) $\sqrt{5x+2} > \sqrt{8-x}$ б) $\sqrt{4+3x-x^2} < 2$

93. барабарсыздыктарды чыгаргыла.

а) $\sqrt[3]{3x-7} > \sqrt[3]{7x+2};$

б) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}.$

3.4. Модул камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгаруу.

Модул камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгарууда модулдун аныктамасы жана интервалдар методу колдонулат.

1-аныктама. *Ар кандай x саны үчүн, анын модулу* $|x|$ *төмөнгүчө табылат:* $|x| = \begin{cases}-x, \text{эгерде } x < 0, \\ x, \text{эгерде } x \geq 0.\end{cases}$ *болсо.*

2-аныктама. *Ар кандай чыныгы* x *жана* x_o *сандары үчүн* $x - x_o$ *үчүн модулу төмөнкүчө табылат:*

$$|x - x_o| = \begin{cases} -(x - x_o) \text{ эгерде } x < x_o \\ x - x_o \text{ эгерде } x \ge x_o \end{cases},$$

3-аныктама. *Эгерде* $y = f(x)$ *чыныгы функциясы берилсе б.а.* $x \in R$ *жана* $y \in R$ *болсо, анда анын модулу* $|f(x)|$ *төмөнкүчө табылат :* $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), \text{эгерде } f(x) < 0, \\ f(x), \text{эгерде } f(x) \ge 0 \end{cases}$

болсо.

4-аныктама. *Модул ичиндеги туюнтманын нөлү, анын критикалык (сыналуучу) чекити деп аталат.*

1-мисал. $y = |x^2 - 3x| + |x + 5|$ *функциясынын сыналуучу чекиттерин тапкыла:*

Чыгаруу: Берилген функцияда эки модул бар. Алардын ар бирөөндөгү туюнтмаларды нөлгө барабарлап:

$x^2 - 3x = 0$ *жана* $x + 5 = 0$ *теңдемелерин*

$x(x - 3) = 0,$ $x = -5;$ *алабыз.*

$x = 0,$

$x - 3 = 0,$

$x = 3.$ *Демек, теңдемелердин тамырлары* $x_1 = 0,$ $x_2 = 3$ *жана* $x_3 = -5.$ *Бул тамырлар функциянын сыналуучу чекиттери болушат.*

2-мисал. Теңдеменин сыналуучу чекиттерин тапкыла.

$$|3x + 6| - |5x - 2| + |x - 7| = 12;$$

Чыгаруу: Теңдемеде үч модул бар.

$|3x + 6|,$ $|5x - 2|$ *жана* $|x - 7|$. *Модул ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап:*

$3x + 6 = 0,$ $3x = -6,$ $x = -6:3,$ $x = -2.$	$5x - 2 = 0,$ $5x = 2,$ $x = 2:6,$ $x = 0{,}4.$	$x - 7 = 0,$ $x = 7.$	*Теңдемелерин алабыз*

Демек, берилген теңдеменин сыналуучу чекиттери $x = -2,$ $x = 0{,}4$ *жана* $x = 7$ *болот.*

Барабарсыздыктардын да сыналуучу чекиттери ушундай эле жол менен табылат.

Модул камтыган теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгарууда төмөнкү эрежелер колдонулат:

1. Сыналуучу чекиттерди табуу керек;

2. Сыналуучу чекиттер аркылуу сан огун интервалдарга бөлүп алуу керек;

3. Аныкталган ар бир интервалда модул белгиси жок теңдеме чыгарылат.

Интервалдарда табылган чыгарылыштардын көпчүлүкторүнүн биригүүсү теңдеменин чыгарылышы болот.

3-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

$$|x+5| = 3x-1;$$

Чыгаруу: Адегенде сыналуучу чекиттерди табабыз.

$x+5=0,$

$x=-5.$ *Бул чекит сан огун* $(-\infty;-5)$ *жана* $[-5;+\infty)$ *интервалдарына бөлөт. Ар бир интервалда* $|x+5|$ *белгиси турактуу.*

Модулдун аныктамасы боюнча

$x \in (-\infty;-5)$ *же* $x < -5$ *болгондо*

$-(x+5)=3x-1,$

$-x-5=3x-1,$

$-x-3x=-1+5,$

$-4x=4,$

$x=-1.$ *Бул тамыр* $(-\infty;-5)$ *интервалына кирбейт. Демек бул интервалда теңдеменин тамыры жок.*

$x \in [-5;+\infty)$ *же* $x \geq -5$ *болгондо*

$x+5=3x-1,$

$x-3x=-1-5,$

$-2x=-6,$

$x=3.$

$x=3$ *тамыры* $[-5;+\infty)$ *интервалына таандык. Демек, ал чыгарылыш болот.*

Жообу: $x=3.$

4-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

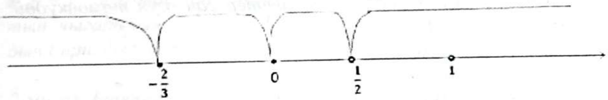
$$|1-2x|+|3x+2|+|x|=5;$$

Чыгаруу: Теңдеменин АО: $x \in R.$

Сыналуучу чекиттерди табабыз:

$1-2x=0$ $x=\frac{1}{2}$	$3x+2=0$ $x=-\frac{2}{3}$	$x=0$

бул сыналуучу чекиттер сан огун төмөнкүдөй интервалдарга бөлөт.



46-сүрөт

$(-\infty;-\frac{2}{3})$, $\left[-\frac{2}{3};0\right)$, $\left[\frac{1}{2};0\right)$ *жана* $[\frac{1}{2};+\infty)$;

Ар бир интервалда модулдун ичиндеги туюнтмалардын белгилери туруктуу сакталат.

1) $x\in(-\infty;-\frac{2}{3})$ *болсо, берилген теңдемеден*

$(1-2x)-(3x+2)-x=5$ *келип чыгат.*

$1-2x-3x-2-x=5,$

$-6x=6,\ x=-1$ *бул тамыр* $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ ге *таандык чыгарылыш болот.*

2) $x\in\left[-\frac{2}{3};0\right)$ *болсо, берилген теңдемеден*

$(1-2x)+(3x+2)-x=5$ *келип чыгат.*

$1-2x+3x+2-x=5,\quad 3\neq 5$ *теңдеменин тамыры жок.*

3) $x\in\left[\frac{1}{2};0\right)$ *болсо, берилген теңдемеден*

$(1-2x)-(3x+2)+x=5$ *келип чыгат.*

$1-2x+3x+2+x=5,$

$2x=2,\ x=1$ *бул тамыр* $\left[\frac{1}{2};0\right)$*интервалына таандык эмес, чыгарылыш болбойт.*

4) $x\in[\frac{1}{2};+\infty)$ *болсо, берилген теңдемеден*

$-(1-2x)+(3x+2)+x=5$ *келип чыгат.*

$-1+2x+3x+2+x=5,$

$6x=4,\ x=\frac{4}{6},\ x=\frac{2}{3}$ *бул тамыр* $[\frac{1}{2};+\infty)$*интервалына таандык, чыгарылыш болот.*

Жообу: $x_1=-1;\ \ x_2=\frac{2}{3}.$

5-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

$$|x^2 + x| + 3x - 5 = 0;$$

Чыгаруу: Теңдеменин АО: $x \in R$.

Сыналуучу чекиттерди табабыз:

$x^2 + x = 0$,

$x(x + 1) = 0$,

$x = 0,\ x = -1$. *Бул сыналуучу чекиттер сан огун төмөнкүдөй интервалдарда бөлөт.*

$(-\infty; -1)$, $[-1; 0)$, $[0; +\infty)$.

1) $x \in (-\infty; -1)$ *болсо,*

$x^2 + x + 3x - 5 = 0$ *теңдемесин алабыз.*

$x^2 + 4x - 5 = 0$,

$x_1 = -5;\quad x_2 = 1$. *Бул тамырлардан* $x_1 = -5$ $(-\infty; -1)$ *интервалына таандык. Демек,* $x_1 = -5$ *чыгарылыш болот.*

2) $x \in [-1; 0)$ *болсо,*

$-(x^2 + x) + 3x - 5 = 0$ *теңдемесин алабыз.*

$-x^2 - x + 3x - 5 = 0$,

$x^2 - 2x + 5 = 0$, $D = 4 - 20 = -16 < 0$ *теңдеменин тамыры жок.*

3) $x \in$, $[0; +\infty)$ *болсо,*

$x^2 + x + 3x - 5 = 0$ *теңдемесин алабыз.*

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$x_1 = -5;\quad x_2 = 1$. *Бул тамырлардан* $x_2 = 1$, $[0; +\infty)$ *интервалына таандык, ал чыгарылыш болот.*

Жообу: $\{-5; 1\}$.

Модулду камтыган барабарсыздыктар да модулдуу теңдемелерди чыгаруудагы эрежелер менен чыгарылат. Интервалдар методу колдонулат.

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$|x + 5| \geq 2;$$

Чыгаруу: Сыналуучу чекиттерди табабыз:

$x + 5 = 0$,

$x = -5$ *бул чекит АОну төмөнкүдөй* $(-\infty; -5)$ *жана* $[-5; +\infty)$ *интервалдарына бөлөт.*

1) $x \in (-\infty; -5)$ *болсо,*

$-(x + 5) \geq 2$ *барабарсыздыгын алабыз.*

$$-x-5 \geq 2$$
$$-x \geq 7$$
$$x \leq -7$$

$(-\infty; -7]$ *чыгарылыш болот.*

2) $x \in [-5; +\infty)$ *болсо,*

$x + 5 \geq 2$ *болот.*

$x \geq -3$ *болгондо барабарсыздык аткарылат. Барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү* $(-\infty; -7] \cup [-3; +\infty)$ *интервалдардын биригүүсү болот.*

Жообу: $(-\infty; -7] \cup [-3; +\infty)$.

2-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$|x-15| < 0;$$

Чыгаруу: $|x-15|$ *туюнтмасынын мааниси ар дайым нөлдөн чоң же барабар болот. Ошондуктан берилген барабарсыздык чыгарылышка ээ болбойт.*

Жообу: $\emptyset$.

3-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

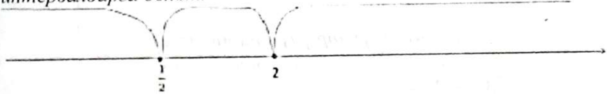
$$|2x-1| - |x-2| \geq 4;$$

Чыгаруу: БАО: $x \in R$.

Сыналуучу чекитерди табабыз.

$2x-1=0,$ $2x=1,$ $x=1/2.$	$x-2=0,$ $x=2.$

$x = 1/2$, *жана* $x = 2$ *чекиттери АОну төмөнкүдөй интервалдарга бөлөт.*



47-сурот

$(-\infty; \frac{1}{2})$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$ *жана* $[2; +\infty)$ *бул интервалдарда берилген барабарсыздыкты карап чыгалы.*

1) $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$ *болсо,*

$-(2x-1) - \big(-(x-2)\big) \geq 4,$

$-2x - 1 + x - 2 \geq 4,$

$-x - 1 \geq 4,$

$-x \geq 5,$

$x \le -5$. $(-\infty; -5]$ *интервалы каралган интервалда чыгарылыш болот.*

2) $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right)$ *болсо,*

$2x - 1 - \left(-(x-2)\right) \ge 4,$

$2x - 1 + x - 2 \ge 4,$

$3x \ge 4 + 3,$

$x \ge \frac{7}{3},$ $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$ *бул каралган интервалга тиешелүү эмес. Ошондуктан чыгарылыш болбойт.*

3) $x \in [2; +\infty)$ *болсо,*

$2x - 1 - (x-2) \ge 4.$

$2x - 1 - x + 2 \ge 4,$

$x \ge 3,$ $[3; +\infty)$ *интервалы каралган интервалга тиешелүү, чыгарылыш болот.*

Жообу: $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

4-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$|7 - x| < 5;$$

Чыгаруу: Бул барабарсыздыкты модулдун касиетин пайдаланып чыгарабыз:

$|7 - x| < 5,$

$-5 < 7 - x < 5,$

$-5 - 7 < -x < 5 - 7,$

$-12 < -x < -2$ *(-1)ге көбөйтөбүз.*

$12 > x > 2,$ $2 < x < 12.$ *Жообу:* $2 < x < 12$.

3.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма.

94. Теңдеменин сыналуучу чекиттерин тапкыла:

а) $|x - 5| + |3x - 8| = 12;$

б) $|x| + |x + 8| + |2x - 5| = 7;$

95. Барабарсыздыктын сыналуучу чекиттерин тапкыла:

а) $|x - 1| + |x^3 - 4x| > 5;$

б) $|2x - 7| - |x^3 - 9| < x^2 - 3.$

96) теңдемени чыгаргыла:

а) $|x - 3| = 2x - 8;$ *б)* $|x + 5| = |10 + x|.$

97. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $|x - 7| \le 0;$ *б)* $|x - 3| + |x + 2| - x > 5.$

3.5. Алгебриалык теңдемелердин системаларын чыгаруу методдору.

Алгебралык теңдемелерди чыгаруунун төмөндөгүдөй негизги методдоруна токтолобуз.

1. Гаустун методу.

Бул метод, системаны үч бурчтук түрүнө келтирүү же белгисизди ордуна коюу методу деп да аталат.

Гаустун методу сызыктуу жана сызыктуу эмес теңдемелерден турган системаларды чыгарууда кеңири колдонулат.

1 –мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8, \\ x + 3y = 10; \end{cases}$$

Чыгаруу: Берилген теңдемелер системасынын 2-теңдемесинен x *ти* y *аркылуу туюнтуп алып, аны 1-теңдемеге коюп* y *тин маанисин табабыз.*

$x = 10 - 3y$ *бул туюнтманы 1 – теңдемеге коёбуз.* $3(10 - 3y) - 2y = 8$

$30 - 9y - 2y = 8$

$-11y = 8 - 30$

$-11y = -22$

$y = 2$

$\begin{cases} 3x - 3y \\ y = 2 \end{cases}$ *демек, система үч бурчтук түрүнө келди* $y = 2$ *ни 1 – теңдемеге коюп* x *ти табабыз.*

$$3x - 2 \cdot 2 = 8$$
$$3x = 8 + 4$$
$$3x = 12$$
$$x = 4.$$

Жообу: $(4; 2)$.

2 – мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + y^2 = 11 \end{cases}$$

Чыгаруу: Системасынын 2 – теңдемиесинин x *ти* y *аркылуу туюндуруп алабыз жана 1 – теңдемелердеги* x *тин ордуна коебуз.*

$$x = 11 - y^2$$
$$(11 - y^2)^2 + y^2 = 13$$

$121 - 22y^2 + y^4 + y^2 = 13$

$y^4 - 21y^2 + 108 = 0$

$y^2 = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$t^2 - 21t + 108 = 0, \quad D = 441 - 432 = 9$,

$t_{1/2} = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2}$; $t_1 = 12$, $t_2 = 9$.

$y^2 = 12, \qquad y^2 = 9,$

$y_1 = \sqrt{12}, \qquad y_3 = 3,$

$y_2 = -\sqrt{12}, \qquad y_4 = -3.$

y *тин табылган маанилерин* $x = 11 - y^2$ *ка коюп,* x *тин маанилерин табабыз.*

$x_1 = 11 - (\sqrt{12})^2 = 11 - 12 = -1$

$x_2 = 11 - (\sqrt{12})^2 = 11 - 12 = -1$

$x_3 = 11 - 3^2 = 11 - 9 = 2$

$x_4 = 11 - (-3)^2 = 11 - 9 = 2$

Жообу: $(-1;\ \sqrt{12}), (-1;\ -\sqrt{12}),\ (2;\ 3),\ (2; -3)$

2. Крамердин аныктагычтар методу.

Төмөнкү эки белгисиздүү теңдемелер системасын чыгарууда Крамердин методунун колдонулушун көрсөтөлү.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Мында $a_{11},\ a_{12},\ a_{12}, a_{21}$ *жана* a_{12} *белгисиз өзгөрмөлөрдүн коефициенттери.* b_1, b_2 *бош мүчө.*

$b = \binom{b_1}{b_2}$ *бош мүчө вектору деп аталат.*

Аныктама.

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ *саны (1) системанын атыктагычы деп аталат жана ал* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *деп берилет.*

Бул аныктагычтын эки жолчосу жана эки мамычасы бар. Ошондуктан ал 2-тартиптеги аныгтагыч деп аталат.

(1) системаны чыгаруу үчүн төмөндөгүдөй аныктагыч түзүлөт.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

системадагы x тин коэффициенттеринен түзүлгөн $\binom{a_{11}}{a_{21}}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

мамычасы бош мүчө вектору менен алмашты.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

системадагы у тин коэффициенттеринен түзүлгөн $\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ *мамычасы бош мүчө вектору менен алмашты.*

Аныктагычты төмөндөгүдөй эреже боюнча табабыз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21};$$

(1) Сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы $\Delta \neq 0$ *болсо, төмөндөгүдөй болот:*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$\Delta = 0$ *болгондо Крамердин эрежеси колдонулбайт.*

3-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14, \\ 5x + 3y = 22; \end{cases}$$

Чыгаруу: *Крамердин методу менен чыгаралы.*

1) Аныктагычтарды таап алабыз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 22 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 - 2 \cdot 22 = 42 - 44 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 5 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 14 \cdot 5 = 66 - 70 = -4.$$

2) Крамердин эрежесиз боюнча:

$$x = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

Жообу:(2;4).

4-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$$

Чыгаруу: Аныктагычтардын таап алабыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 7 = 9$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 8 = 6.$$

Крамердин эрежеси боюнча

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3,\qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2.$

Жообу: $(3; 2)$.

3. Алгебралык кошуу жолу.

5-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ 3x^3 - 2y^3 = 22; \end{cases}$$

Чыгаруу: 1-теңдеменин эки жагын тең 2 ге көбөйтүп, аны 2 – теңдемеге кошобуз:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 2y^3 = 18 \\ + \\ 3x^3 - 2y^3 = 22 \\ \hline 5x^3 = 40 \end{array}$$

$$x^3 = 8$$

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^3 = 8, \end{cases}$ *теңдемелер системасын алдык* $x^3 = 8,\ x = 2$ *бул маанини 1 – теңдемеге коюп,* y *тин маанисин табабыз.*

$$2^3 + y^3 = 9,$$

$$y^3 = 9 - 8,$$

$$y^3 = 1, \quad y = 1.$$ *Жообу:* $(2; 1)$

4. Жаңы белгисизди кийирүү методу.

6-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3 \\ xy = 8 \end{cases}$$

Чыгаруу: Системанын экинчи теңдемесинен куб тамыр чыгарып, андан кийин өзгөрмө кийиребиз.

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt{8}$$

$$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=2.$$

$\sqrt[3]{x}=u$ *жана* $\sqrt[3]{y}=\vartheta$ *өзгөрмөлөрүн киййиребиз.*

Анда берилген теңдемелер системасы

$\begin{cases} u+\vartheta=-3 \\ u\cdot\vartheta=2 \end{cases}$ *түрүнө келет, эми ордуна коюу методун пайдаланабыз.*

$$\begin{cases} u=-3-\vartheta \\ (-3-\vartheta)\cdot\vartheta=2 \end{cases} \qquad -3\vartheta-\vartheta^2=2,$$

$$\vartheta^2+3\vartheta+2=0,\quad D=9-8=1\,, \qquad u_1=-3-(-1)=-2.$$

$$\vartheta_1=\frac{-3+1}{2}=-1,\quad \vartheta_2=\frac{-3-1}{2}=-2; \qquad u_2=-3-(-2)=-1.$$

Демек, $\sqrt[3]{x}=-2\quad \sqrt[3]{x}=-1,\ \sqrt[3]{y}=-1,\ \sqrt[3]{x}=-2$

$$x_1=(-2)^3,\ x_2=-1,\ y_1=-1,\ \ y_2=-8$$

$$x_1=-8$$

Жообу: $(-8;-1),\ (-1;-8)$.

5. Көбөйтүү, бөлүү жолу.

7-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{2y}{x}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}; \end{cases}$$

Чыгаруу: Системадагы эки теңдеменин эки жагын тең, алардын оң жактагы туюнтмаларынын түюндоштөрүнө көбөйтөбүз.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)=\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-4}\right) \\ \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)=\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)=2x, \\ \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)=2y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{2xy}, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{2xy}, \end{cases}$$

Системасынын биринчи теңдемесинен экинчи теңдемени кемитип, төмөнкү теңдемени алабыз

$$-2\sqrt{x-y}=0$$

$$x - y = 0$$

$x = y$ *бул маанини биринчи теңдемеге коебуз:*

$$\sqrt{x + x} - \sqrt{x - x} = \sqrt{2y \cdot y}$$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{2y^2}$$

$$\sqrt{2y} - \sqrt{2y^2} = 0$$

$$\sqrt{2}y\left(1 - \sqrt{y}\right) = 0$$

$y = 0$ *бул тамыр чыгарылыш болбойт.* $1 - \sqrt{y} = 0$

$$\sqrt{y} = 1$$

$y = 1.$ *демек,* $x = 1$ *болот.*

Жообу: $(1; 1)$.

8-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x(x + y) = 9, \\ y(x + y) = 16. \end{cases}$$

Чыгаруу: Бул теңдемелер системасынын 1-тедемесин анын 2-теңдемесине мүчөлөп бөлүп, төмөнкү теңдемелер системасына ээ болобуз

$$\begin{cases} x(x + y) = 9, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16}, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy = 9, \\ x = \dfrac{9}{16} \cdot y, \end{cases} \quad (\frac{9}{16}y)^2 + \frac{9}{16}y^2 = 9$$

$$(\frac{225}{256}y^2 = 9, \quad y^2 = 9 : \frac{225}{256} = 9 \cdot \frac{256}{225} = \frac{256}{25}.$$

Демек, $y^2 = \frac{256}{25}$; $y_1 = \frac{16}{5}$; $y_2 = -\frac{9}{5}$

Анда $x_1 = \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$; $x_2 = \frac{9}{16} \cdot \left(-\frac{16}{5}\right) = -\frac{9}{5}$

Жообу: $\left(\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{16}{5}\right)$.

3.6. Алгебралык барабарсыздыктардын системарын чыгаруу.

Алгебралык барабарсыздыктардын системаларында белгисиз чоңдуктардын саны бирөө, экөө же бир нече болушу мүмкүн. Анын чыгарылыштарын табуу үчүн аныкталуу обласптта системадагы ар бир барабарсыздыкты канааттандырган белгисиз чоңдуктардын маанилеринин көптүктөрүн таап жана ал көптүктөрдүн жалпы бөлүктөрүн аныктап коюш керек.

1-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x-1)^2 \le 25. \end{cases}$$

Чыгаруу: AO: $x > 0$, б.а. $x \in (0; +\infty)$

$(x-1)^2 \le 25$ *барабарсыздыгынан*

$|x-1| \le 5$ *барабарсыздыгы келип чыгат.*

$-5 \le x-1 \le 5 \Rightarrow -4 \le x \le 6$ *демек берилген барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы* $(0; +\infty) \cap [-4; 6] = (0; 6]$

Жообу: $x \in (0; 6]$.

2-мисал. Барабарсыздыктар системасы чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{10x} + \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[6]{3-x} > 3, \\ \sqrt[4]{x-1} > 0. \end{cases}$$

Чыгаруу: Берилген системанын АО сун табабыз.

$x-3 \ge 0$, $3-x \ge 0$, $x-1 > 0$,

$x \ge 3$; $x \le 3$; $x > 1$; $(1; +\infty)$

$[3; +\infty) \cap (-\infty; 3] = 3$

$\{3\} \cap (1; +\infty) = 3$.

Демек, барабарсыздыктар системасы жалгыз $x = 3$ *чыгарылышына ээ болот.*

Жообу: $x = 3$

3-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-3} < 2 \\ \sqrt{x+1} > 2 \end{cases}$$

$AO: x+1 \ge 0;\ x \ge -1$

Чыгаруу: Системадагы биринчи барабарсыздыктын эки жагын тең кубка көтөрөбүз, экинчи барабарсыздыкты квадратка көтөрөбүз.

$\begin{cases} x-3 < 8, \\ x+1 > 4 \end{cases}$ *барабарсыздыктар системасын алабыз.*

$$\begin{cases} x-3 < 8, \\ x+1 > 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8+3, \\ x > 4-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 11, \\ x > 3. \end{cases}$$

Демек, 1-барабарсыздктын чыгарылышы $(-\infty; 11)$,

2-барабарсыздыктын чыгарылышы $(3; +\infty)$.

Барабарсыздыктар ситемасыны чыгарылшы

$$(-\infty; 11) \cap (3; +\infty) = (3; 11)$$

Жообу: $x \epsilon (3; 11)$.

4-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$0 < \frac{3x-1}{2x+5} < 1;$$

Чыгаруу: Барабарсыздыктын аныкталуу областын табабыз:

$2x + 5 \neq 0$

$$2x \neq -5$$

$$x \neq -\frac{5}{2};$$

Демек, АО: $x \neq -\frac{5}{2}$

Берилген барабарсыздыкты төмөнкүдөй рационалдык барабарсыздыктар системасы түрүндө жазып алабыз.

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{2x+5} > 0, \\ \frac{3x-1}{2x+5} < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ 2x + 5 > 0, \\ \frac{3x-1}{2x+5} - 1 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x > -\frac{5}{2}, \\ x < 6, \\ x > -\frac{5}{2}; \end{cases}$$

Демек, биринчи барабасыздыктын чыгарылыш көптүгү:

$$\left(-\frac{5}{2}; +\infty\right) \cap \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Экинчи барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү:

$$(-\infty; 6) \cap \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right) = \left(-\frac{5}{2}; 6\right)$$

Барабарсыздытар системасынын чыгарылышы:

$$\left(-\frac{5}{2}; 6\right) \cap \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{3}; 6\right)$$

Жообу: $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$

Эки белгисиздүү барабарсыздыктар системаларын чыгаруу бир белгисиздүү барабарсыздыктар системаларын чыгарууга караганда татаалырак. Ошондуктан эки белгисиздүү барабарсыздыктарды чыгаруунун негизги методу график методу болуп эсептелет.

Системадагы барабарсыздыктардын графиктерин бир эле координаталар системасына чийип, графиктердин кесилишинин жалпы бөлүгүн штрихтеп, x *жана* y *тердин штрихтелген бөлүктөгү түгөйлөрүнүн көптүгү барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы экендигин табабыз.*

5-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

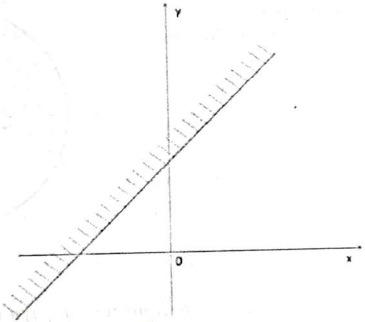
$$\begin{cases} y - x - 2 \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases}$$

Чыгаруу: Системадагы биринчи барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $y - x - 2 = 0$ *түз сызыгы аныктаган жарым тегиздик. Аны табуу үчүн*

$y = x + 2$

функциясынын графигин чийебиз.

x	0	1
y	2	3

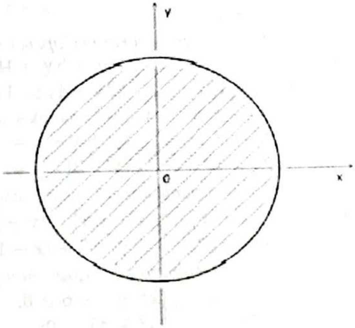


47-сүрөт

47-сүрөттөгү түз сызыктын штрихтелген тарабы $y - x - 2 \geq 0$ *барабарсыздыгын канааттандырган* (x, y) *түгөйлөрүнүн көптүгү.*

$x^2 + y^2 \leq 16$

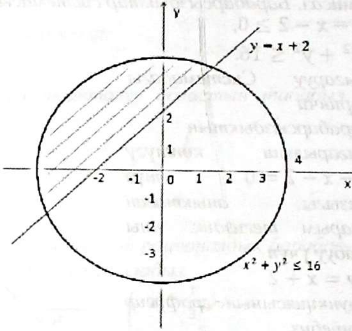
барабарсыздыгын чыгарылыш көптүгү, борбору координата башталышында жаткан радиусу 4 болгон тегеректин ичиндеги (x, y) *түгөйлөрү болот.*



48-сүрөт

Берилген барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү болуп 47-сүрөттөгү жарым тегиздик менен 48-сүрөттөгү тегеректин ички тегеректеринин көптүгүнүн кесилиши болот. (49-сүрөт)

Мисалы, $(-1;3)$, $(-2;2)$ түгөйлөрү барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы болот.



49-сүрөт

3.5. – 3.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

98. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 9; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x + y = 5, \end{cases}$

99. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 5x - 2y = 11; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 3x + 5y = 10, \\ 2x - 4y = 14. \end{cases}$

100. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^4 - 3y^2 = -11, \\ 2x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2. \end{cases}$

101. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^4 - 3y^2 = -11, \\ 2x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|; \end{cases}$

102. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} (x - 2)^2 \le 36, \\ x - 1 > 0; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x^2 - x - 6 \ge 0, \\ x^2 - 4x < 0; \end{cases}$

103. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \sqrt{4 - x} + \sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[4]{x - 4} > 2, \\ \frac{x-5}{x+3} < 0; \end{cases}$

б) $1 \le \frac{3-x}{x+2} \le 2.$

4-глава. Көнүгүүлөр үчүн берилген тапшырмалардын чыгарылыштары жана жооптору

1.1 Баштапкы функция жана аныкталбаган интеграл.

1. Чыгаруу: F функциясы берилген аралыкта f функциясынын баштапкы функциясы болуш үчүн

$$F'(x) = f(x)$$

барабардыгы аткарылыш керек.

а) $F'(x) = (x^{10} + 3)' = (x^{10})' + 3' = 10x^9$, *демек,*

$$F' = f(x) = 10x^9;$$

б) $F'(x) = (x^{-6} + 2x)' = (x^{-6})' + (2x)' = -6x^{-7} + 2,$

$$f(x) = -6x^{-7} + 2;$$

в) $F'(x) = (3 + sinx)' = 3' + (sinx)' = cosx, \ f(x) = cosx;$

г) $F'(x) = (tgx - 4)' = (tgx)' - 4' = \frac{1}{cos^2 x}, \ f(x) = \frac{1}{cos^2 x}.$

Жообу: а)-г). F функциясы берилген аралыкта f функциясынын баштапкы функциясы болот.

2. а) Чыгаруу: Баштапкы функцияны табуунун үч эрежесин жана таблицаны пайдаланабыз.

$f(x) = 3x^2 + x - 5, F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + c;$

б) Чыгаруу: $sin^2 x + cos^2 x = 1$ *жана* $sin2x = 2sinx \cdot cosx$ *формулаларын падаланып* $(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2})^2$ *туюнтмасын өзгөртүп түзөбүз.*

$$f(x) = (sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2})^2 = sin^2\frac{x}{2} - 2\,sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} =$$
$$= 1 - sinx;$$

$$f(x) = 1 - sinx, \quad F(x) = x + cosx + c;$$

в) Чыгаруу: $f(x) = -8x^3 + \frac{5}{x^3} + 3 \cdot x^2 - 9,$

$$F(x) = -8 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 9x + c =$$
$$= -2x^4 - \frac{5}{2x^2} + x^3 - 9x + c;$$

г) Чыгаруу: $f(x) = \frac{4}{cos^2 x} + \frac{3}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}},$ *бул функциянын баштапкы функциясын табууда интегралдоонун (8), (10) жана (12) формулаларынын колдонобуз.*

$F(x) = 4tgx + 3arctgx - 5arcsinx + c;$

д) Чыгаруу: $f(x) = \frac{1}{cos^2 x} + 5x^3, \ F(x) = tgx + 5 \cdot \frac{x^4}{4} + c =$

$$= tgx + \frac{5}{4}x^4 + c;$$

е) Чыгаруу: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 2x^{-4},\ F(x) = 3 \cdot 2\sqrt{x} - 2 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} =$

$= 6\sqrt{x} + \frac{2}{3x^3}$ *баштапкы функцияларды табуунун таблицасын колдонобуз.*

ж) Чыгаруу: $f(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$, *бул функциянын оң жагын төмөндөгүдөй өзгөртүп түзөбүз.*

$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}$, *эми (10) жана (12) интегралдоонун формулаларын пайдаланып, баштапкы функцияны табабыз.*

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} arctg2x - 3 \cdot \frac{1}{3} arcsin3x + c =$$
$$= arctg2x - arcsin3x + c;$$

з) Чыгаруу: $f(x) = 4cos2x + 6x + \frac{4}{x^3}$;

$F(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} sin2x + 6 \cdot \frac{x^2}{2} + +4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = 2sin2x + 3x^2 - -2 \cdot \frac{1}{x^2} + c.$ *баштапкы функцияны табуунун 3-эрежесин жана таблицаны пайдаланабыз.*

3. *Чыгаруу:* $\vartheta(t) = t^2 + 2t - 1$ *ылдамдыгы үчүн баштапкы функция болуп* $x(t)$ *координатасы эсептелет,*

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t + c,$$

$t = 0$ *до чекит координаттык башталышта болсо, б.а.* $x(0) = 0$ *шартынан туруктуу С ны табабыз*

$x(t) = \frac{0^3}{3} + 0^2 - 0 + c$ *демек,* $c = 0$ *анда чекиттин кыймылдоо закону* $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t$ *болот.*

4. *Чыгаруу:* $a(t) = 12t^2 + 4$ *ылдамдануусунун баштапкы функциясы* $\vartheta(t)$ *чекиттин ылдамдыгы болуп эсептелет.*

$\vartheta(t) = 12\frac{t^3}{3} + 4t + c = 4t^3 + 4t + c,\ t = 1$ *моментинде* $\vartheta(1) = 10$ *см* *болгондуктан, туруктуу С ны табабыз*

$$4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 + c = 10, \quad 8 + c = 10, \quad c = 2$$

Демек, $\vartheta(t) = 4t^3 + 4t + 2$

$\vartheta(t)$ *ылдамдыгы үчүн баштапкы функция болуп* $x(t)$ *координатасы эсептелет.*

Анда $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + c$ *болот.*

$x(1) = 12$ *шартынан турактуу С ны табабыз*

$$1^4 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + c = 12, \quad 5 + c = 12, \quad c = 7$$

Демек, чекиттин кыймылдоо закону

$$x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7 \quad \text{болот.}$$

5. Чыгаруу:

а) $\int 9dx = 9x + c;$ *интегралдоонун формуласы боюнча.*

б) $\int 5x\,dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{5}{2}x^2 + c;$ *(3) формула пайдаланылды;*

в) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c;$ *(3) формула боюнча;*

г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c;$ *баштапкы функцияны табуунун таблицасы пайдаланылды;*

д) $\int 3cosx\,dx = 3\int cosx\,dx = 3sinx + c;$ *интегралдоонун 1 – эрежеси жана (6) формула боюнча.*

е) $\int \frac{1}{sin^2x} dx = -ctgx + c;$ *(9) формула боюнча;*

ж) $\int sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{5}\left(-\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\right) + c;$ *интегралдоонун 3 – эрежеси жана (4) формула боюнча.*

з) $\int(5x^4 - 2x^2 + 7)\,dx = \int 5x^4 dx - \int 2x^2 + \int 7dx =$
$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + 7x + c = x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 7x + c$ *интегралдоонун 1 - 2 – эрежелери, (3) формула боюнча;*

и) $\int \frac{7x^6+3}{x^4} dx = \int\left(\frac{7x^6}{x^4} + \frac{3}{x^4}\right) dx =$ *интеграл алдындагы*
$= \int 7x^2 dx + 3\int x^{-4}\,dx =$ *туюнтманы*

$=7\frac{x^3}{3}+3\frac{x^{-3}}{-3}+c=$ *өзгөртүп түздүк, 2 – эреже,*

$=\frac{7}{3}x^3-x^{-3}+c.$ *(3) формула пайдаланылды;*

к) $\int(3x-5)^{10}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{11}}{11}+c=\frac{1}{33}(3x-5)^{11}+c;$

интегралдоонун 1 – эрежеси, (3) формула боюнча;

л) $\int\frac{7}{cos^2(4x+1)}\cdot dx=7\int\frac{1}{cos^2(4x+1)}\cdot dx=$ *интегралдоонун*

$=7\cdot\frac{1}{4}tg(4x+1)+c=$ *1 – эрежеси,*

$=\frac{7}{4}tg(4x+1)+c$ *(8) формула боюнча;*

м) $\int\left(\frac{2}{sin^2x}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int\frac{1}{sin^2x}dx+3\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$=2(-ctgx)+3arcsinx+c=$ *интегралдоонун*

$=-2ctgx+3arcsinx+c$ *1 – эрежеси, (9), (10) формулалар боюнча;*

н) $\int 2x\sqrt{x}\,dx=\int 2x^{\frac{2}{3}}\,dx=2\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\text{c}=$ *интеграл*

$=2\cdot\frac{x^{2\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}}+\text{c}=4\cdot\frac{x^2\sqrt{x}}{5}+\text{c}$ *астындагы туюнтма өзгөртүп түзүлдү, (3) формула колдонулду;*

о) $\int\left(\frac{1}{(3x-1)^4}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$ *интегралдоонун*

$=\int(3x-1)^{-4}dx+4\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$ *1 – 2 –эрежеси,*

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{-3}}{-3}+4\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=$ *(3) формула боюнча.*

$=-\frac{1}{9(3x-1)^3}+6\sqrt[3]{x^2}+c.$

6. Чыгаруу: $a(t)$ *ылдамдануусу үчүн баштапкы, функция болуп* $\vartheta(t)$ *ылдамдыгы эсептелет, башкача айтканда* $\vartheta'(t)=a(t)$ *ошондуктан*

$\vartheta(t) = \int a(t)\,dt = \int (8t+8)\,dt = 4t^2 + 9t + c,$

Берилген $\vartheta(0) = 3$ *шартынан турактуу* c_1 *ди табабыз.* $4t^2 + 9t + c_1 = 3$, *демек* $c_1 = 3$ *болот, анда* $\vartheta(t) = 4t^2 +$ $+9t + 3$ *болот.*

$\vartheta(t)$ *ылдамдыгы үчүн баштапкы функция* $x(t)$ *чекиттин координатасы эсептелет. Бизге белгилүү* $x'(t) = \vartheta(t)$. *Ошондуктан*

$x(t) = \int \vartheta(t)\,dt = \int (4t^2 + 9t + 3)dt = \frac{4}{3}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 3t + c_2.$

$x(0) = 6$ *шартынан* c_2 *ни таап алабыз*

$\frac{4}{3}0^3 + \frac{9}{2}0^2 + 3 \cdot 0 + c_2 = 6,\quad c_2 = 6$ *демек, чекиттин кыймылдоо закону* $x(t) = \frac{4}{3}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 3t + 6$ *формуласы менен аныкталат.*

7. *Чыгаруу: Күч Ньютондун 2-закону боюнча* $F = ma$ *формуласы аркылуу туюндурулат. Бул формуладагы ылдамдануу* a *ны* F *жана* m *аркылуу туюнтуп алабыз, б.а.*

$a = \frac{F}{m}$, $F(t) = 21sint$, $m = 7$ *болгондуктан*

$a(t) = \frac{21sint}{7} = 3sint$ *экендиги келип чыгат.*

$\vartheta'(t) = a(t)$ *экендиги бизге белгилүү. Ошондуктан*

$\vartheta(t) = \int a(t)\,dt = \int 3sint\;dt = -3cost + c_1$ *болот. Берилген* $\vartheta(\pi) = 2$ *шартынан турактуу* c_1 *ди табабыз*

$$-3cos\pi + c_1 = 2,\quad -3(-1) + c_1 = 2,\quad c_1 = -1$$

Демек $\vartheta(t) = -3cost - 1$ *болот.*

$x'(t) = \vartheta(t)$ *б.а. чекиттин координатасы* $x(t)$, $\vartheta(t)$ *ылдамдыгынын баштапкы функциясы болот. б.а.* $x(t) = \int \vartheta(t)\,dt = \int(-3cost - 1)dt = -3sint - t + c_2$ *болот.* *Берилген* $x(\pi) = 3$ *шартынан турактуу* c_2 *ни табабыз.*

$$-3sin\pi - \pi + c_2 = 3,\ -3 \cdot 0 - \pi + c_2 = 3,\quad c_2 = 3 + \pi$$

Демек, $x(t) = -3sint - t + 3 + \pi$ *болот.*

8. *Чыгаруу:* $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, *функциясынын баштапкы функцияларын табабыз.*

$F_1(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 = x^3 - x^2 + 4x + c_1$, *бул функциянын графиги* $M(-1; 1)$ *чекити аркылуу өткөндүктөн* c_1 *ди таап алабыз.* $F(-1) = 1$ *демек*

$$(-1)^3-(-1)^2+4\cdot(-1)+c_1=1, \quad -1-1-4+c_1=1,$$
$$c_1=7 \text{ болот.}$$

Демек $F_1(x)=x^3-x^2+4x+7$ *болот.*

$F_2(x)=x^3-x^2+4x+c_2$ *бул функциясынын графиги* $N(0;3)$ *чекитинен өтөт, ушунун негизинде* c_2 *ни табабыз.*
$F_2(0)=3$,*демек* $0^3-0^2+4\cdot 0+c_2=1$, $c_2=1$.
$F_2=x^3-x^2+4x+1$ *болот.*
$F_1(x)-F_2(x)=x^3-x^2+4x+7-(x^3-x^2+4x+1)=6$ *болот.*
$F_1(x)$ *–функциясынын графиги ордината огун*$(0;7)$ *чекитинде,* $F_2(x)$ *– функциясынын графиги ордината огун* $(0;1)$ *чекитинде кесип өтөт. Демек,* $F_1(x)$ *функциясынын графиги жогору жайгашат.*

1.2 - 1.3. Аныкталган интегралдарга көнүгүлөр.

9. Чыгаруу: Аныкталган интегралдарды эсептөөдө, баштапкы функцияларды табуунун таблицасын, аныкталбаган интегралдарды табуунун формулаларын жана Ньютон-Лейбництин формуласын колдонобуз.

а) $\int_0^1 x^4dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}=\frac{1}{5}$;

б) $\int_{-2}^4 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^4=\frac{4^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{16}{2}-\frac{4}{2}=8-2=6$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\cos\frac{\pi}{3}-(-\cos 0)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=tg\, x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=tg\frac{\pi}{4}-tg\, 0=1-0=1.$

10. Чыгаруу:

а) $\int_2^4 5dx=5x\Big|_2^4=5\cdot 4-5\cdot 4-5\cdot 2=20-10=10$;

б) $\int_1^2 (2x+3)dx = (x^2+3x)\Big|_1^2 = (2^2+3\cdot 2)-(1^2+3\cdot 1) =$

$= 10-4=6;$

в) $\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{-1}^0 =$

$= \left(\frac{0^3}{3}+0^2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2\right) = 0-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3};$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{9}} cos3xdx = \frac{1}{3}sin\,3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{3}sin\,3\cdot\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3}sin\,3\cdot 0 =$

$= \frac{1}{3}sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}sin\,0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6};$

11. Чыгаруу:

а) $\int_{-2}^5 dx = x\Big|_{-2}^5 = 5-(-2) = 5+3 = 8;$

б) $\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$

$= -\frac{2(1-1)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2(1-0)^{\frac{3}{2}}}{3} = 0+\frac{2}{3} = \frac{2}{3};$

в) $\int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\Big|_3^8 = 2\sqrt{8+1}-2\sqrt{3+1} = 2\cdot\sqrt{9}-2\sqrt{4} =$

$= 2\cdot 3-2\cdot 2 = 6-4 = 2;$

г) $\int_0^{\pi} 3cos\frac{x}{2}dx = 3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 3\cdot 2\,sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 6\,sin\frac{\pi}{2}-6\,sin\,0 =$

$= 6\cdot 1-6\cdot 0 = 6;$

12. Чыгаруу:

а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sin^2x} = -ctg\,x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -ctg\frac{\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{6} = -1+\sqrt{3};$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,dx = -\frac{1}{2}cos\,x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{2} +$

$+\frac{1}{2}cos\,0 = 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2};$

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\frac{x}{2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos\,x}{2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos\,x)dx = (\frac{1}{2}x +$

$+\frac{1}{2}sin\,x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin\frac{\pi}{2} - (\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{4} +$

$+\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + 1.$

13. Чыгаруу:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\frac{x}{2}dx = \int_0^2\frac{1-cosx}{2}dx = \int_0^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cosx)\,dx =$

$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}sin\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot sin\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}sin0\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1 =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4};$

б) $\int_1^2\frac{dx}{(2x+1)^2} = \int_1^2(2x+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = --\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_1^2 = =$

$-\frac{1}{2(2\cdot 2+1)} + \frac{1}{2(2\cdot 1+1)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{-3+5}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15};$

в) $\int_{-1}^{1}(3x^2 - 4x + 5)dx = (x^3 - 2x^2 + 5x)\Big|_{-1}^{1} =$

$= (1^3 - 2\cdot 1^2 + 5\cdot 1) - ((-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1)) =$

$= (1 - 2 + 5) - -(-1 - 2 - 5) = 4 + 8 = 12;$

14 . Чыгаруу:

а) $\int_0^1\sqrt[3]{x^2}dx = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\Big|_0^1 = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt[5]{x^3}}{5}\Big|_0^1 =$

$= \frac{3\sqrt[5]{1^3}}{5} - \frac{3\sqrt[5]{0}}{5} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5};$

б) $\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 2\cdot\sqrt{\frac{1}{16}} = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$

в) $\int_0^{\pi} tg^2 x dx = \int_0^{\pi}(tg^2 x + 1 - 1)dx = \int_0^{\pi}(tg^2 x + 1)dx -$

$-\int_0^{\pi} 1\cdot dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{cos^2 x}dx - \int_0^{\pi} dx = tg\,x\Big|_0^{\pi} - x\Big|_0^{\pi} = ;$

$= tg\,\pi - tg\,0 - -\pi + 0 = -\pi$

г) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\cdot arc\,tg\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot arc\,tg\frac{2}{2} - \frac{1}{2}arc\,tg\frac{0}{2} =$

$= \frac{1}{2}\cdot arc\,tg\,1 - \frac{1}{2}arc\,tg\,0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{8};$

д) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = arc\,sin\frac{x}{3}\Big|_0^3 = arc\,sin\frac{3}{3} - ars\,sin\frac{0}{3} =$

$= arc\,sin\,1 - arc\,sin\,0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

г) жана д) мисалдарын чыгарууда интегралдоонун (11) жана (13) формулалары колдонулду.

15. Чыгаруу: а) $F(x) = \frac{\int_0^x (S+1)dS}{x+1} = \frac{(\frac{S^2}{2}+S)\Big|_0^x}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{2}+x-0}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{2}+x}{x+1};$

$F'(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+x}{x+1}\right)' = \frac{\left(\frac{x^2}{2}+x\right)'(x+1) - \left(\frac{x^2}{2}+x\right)(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= \frac{(x+1)(x+1) - (\frac{x^2}{2}+x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-\frac{x^2}{2}-x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x^2}{2}+x+1}{(x+1)^2};$

Жообу: $F'(x) = \frac{\frac{x^2}{2}+x+1}{(x+1)^2}.$

б) $F(x) = (sinx)\int_0^x sintdt = (sin\,x)(-\,cos\,t)\Big|_0^x =$

$= -\,sin\,x\cdot cos\,x + sin\,x\,cos\,0 =$

$= -\frac{1}{2}sin\,2x + sin\,x = sin\,x - \frac{1}{2}sin\,2x;$

$$F'(x) = (\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x)' = \cos x - \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \cos 2x =$$
$$= \cos x - \cos 2x.$$

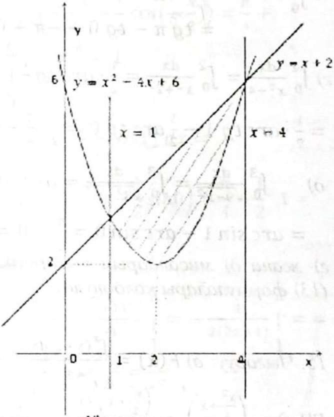
Жообу: $F'(x) = \cos x - \cos 2x$..

16. Чыгаруу: $y = x^2 - 4x + 6, \quad y = x + 2, \ x = 1, \ x = 4$ *сызыктары менен чектелген фигуранын чиймесин сызып алабыз.*

$x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2, m = 2, n = 2$

Демек $y = (x-2)^2 + 2$ *функциясынын графиги чокусу (2;2) чекити болгон, тармактары жогору караган парабола болот.*

$y = x + 2$ *функциясынын графиги парабола менен (1;3) жана (4;6) чекиттеринде кесилишкен түз сызык. Парабола жана түз сызык менен чектелген фигура сүрөттө штрихтелип көрсөтүлгөн. Бул фигуранын аянтын табуу үчүн тик бурчтуу трапециянын аянтынан ийри сызыктуу трапециянын аянтын кемитип коёбуз.*

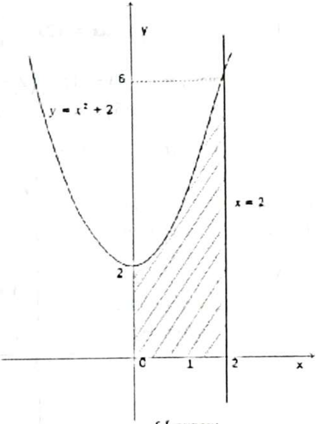


50-сүрөт

$$S = \int_1^4 (x+2)dx - \int_1^4 (x^2 - 4x + 6)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^4 -$$
$$\left(\frac{x^3}{2} - 2x^2 + 6x\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4^2}{2} + 2\cdot 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2\cdot 1\right) - \left(\left(\frac{4^3}{3} - 2\cdot 4^2 + \right.\right.$$
$$\left.6\cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right) = (8+8) - \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \left(\left(\frac{64}{3} - 32 + \right.\right.$$
$$\left.\left.24\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 6\right)\right) = 16 - 2\frac{1}{2} - \left(13\frac{1}{3} - 4\frac{1}{3}\right) = 13\frac{1}{2} - 9 = 4\frac{1}{2}.$$

Жообу: $S = 4\frac{1}{2}$ *кв. бирдик.*

17. Чыгаруу:
$y = x^2 + 2, \quad y = 0,$
$x = 0, x = 2$ *сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны сызып алабыз. Анын аянты төмөнкүгө барабар.*



51-сүрөт

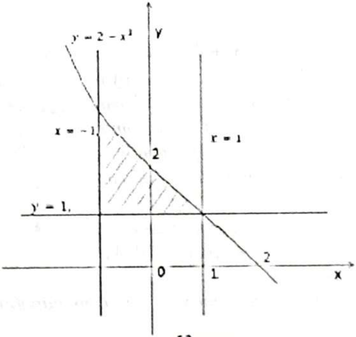
$S = \int_0^2 (x^2 + 2)dx =$

$$\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0\right) = \frac{8}{3} + 4 - 0 = 2\frac{2}{3} + 4 =$$

$= 6\frac{2}{3}$

Жообу: $S = 6\frac{2}{3}$ *кв. бирдик.*

18. Чыгаруу:
$y = 2 - x^3, \quad y = 1,$
$x = -1, \ x = 1$
сызыктары менен чектелген фигуранын чиймесин сызып алабыз. Бул фигуранын аянты төмөнкүгө барабар.



52-сүрөт

$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^3)dx-\int_{-1}^{1}1\cdot dx=\left(2x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}-x\Big|_{-1}^{1}=\left(2\cdot 1-\frac{1^4}{4}-\right.$$

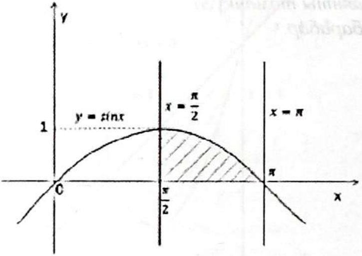
$$\left.-\left(2\cdot(-1)-\frac{(-1)^4}{4}\right)-(1-(-1))\right)=\left(2-\frac{1}{4}+2+\frac{1}{4}\right)-(1+1)=4-2=2.$$

Жообу: $S=2$ *кв. бирдик.*

19. Чыгаруу: $y=sinx,\quad x=\frac{\pi}{2},$

$x=\pi,\ \ y=0$

сызыктары менен чектелген фигураны сызып алыбыз. Чиймедеги ийри сызыктуу трапециянын аянты төмөнкүгө барабар.



53-сүрөт

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx=$$

$$-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-cos\pi-\left(-cos\frac{\pi}{2}\right)=-(-1)-0=1$$

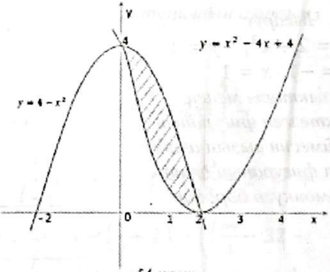
Жообу: $S=1$ *кв. бирдик.*

20. Чыгаруу:

$y=x^2-4x+4,$

$y=4-x^2$, *бул функциянын графиги чокусу* $(2;0)$ *чекити болгон, тармактары жогору капаган паробола болот.*

$y=4-x^2$ *функциясынын графиги чокусу* $(0;4)$ *чекити болгон,*



54-сүрөт

тармактары төмөн караган парабола болот. Бул параболалар *менен чектелген фигуранын аянты, ал параболалар менен чектелген ийри сызыктуу тропециялардын аянттарынын айрмасы болот.*

$$S=\int_0^2(4-x^2)\,dx-\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+\right.$$

$$\left.+4x\right)\Big|_0^2=\left(4\cdot2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(4\cdot0-\frac{0^3}{3}\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot2^2+4\cdot2-\right.$$

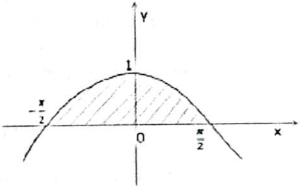
$$\left.-\left(\frac{0^3}{3}-2\cdot0^2+4\cdot0\right)\right)=8-2\frac{2}{3}-2\frac{2}{3}=8-5\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$$

Жообу: $S=2\frac{2}{3}$ *кв. бирдик.*

21. Чыгаруу: $y=cosx,$

$y=0,\ \ x=-\frac{\pi}{2},\ \ x=\frac{\pi}{2}.$

сызыктары менен чектелген ийри ийри сызыктуу трапециянын аянты төмөнкүгө барабар.



55-сүрөт

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cosxdx=sinx\ \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=sin\frac{\pi}{2}-sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$$

Жообу: $S=2$ *кв. бирдик.*

22. Чыгаруу:

$y=x^2+1,\ \ x=0,\ \ x=1,\ \ y=0$ *сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ох огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин сүрөтүн чийип алабыз. (56-сүрөт)*

Бул нерсенин көлөмү

$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ *формуласы менен эсептелет.*

$$V = \pi \int_0^1 (x^2+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4+2x^2+1)dx = \pi\left(\frac{\pi^5}{5}+2\cdot\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1^5}{5}+\frac{2}{3}\cdot 1^3+1\right) - \pi\left(\frac{0^5}{5}+2\cdot\frac{0^3}{3}+0\right) = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \pi\cdot\frac{28}{15} = \frac{28}{15}\pi.$$

Жообу: $V = \frac{28}{15}\pi$ *куб бирдик.*

23. Чыгаруу:

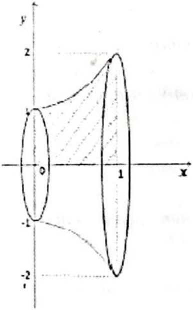
$y = \sqrt{x}+2,\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 4$ *сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын* 0_x *огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин сүрөтүн тартып алабыз(57-сүрөт). Эми формула боюнча нерсенин көлөмүн табабыз.*

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x}+2)^2 dx = \pi \int_1^4 \left(x+4\sqrt{x}+4\right)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}+8\cdot\frac{\sqrt{x^3}}{3}+\right.$$

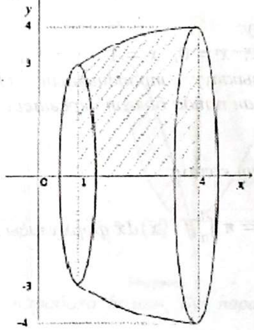
$$\left.+4x\right)\Big|_1^4 = \pi\left(\frac{16}{2}+8\cdot\frac{\sqrt{64}}{3}+16\right) - \pi\left(\frac{1}{2}+8\cdot\frac{\sqrt{1}}{3}+4\right) =$$

$$= \pi\left(8+\frac{64}{3}+16\right) - \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}+4\right) = \pi\cdot 45\frac{1}{3} - \pi\cdot 6\frac{5}{6} = 38\frac{1}{2}\pi$$

Жообу: $V = \frac{77}{2}\pi$ *куб бирдик.*



55-сүрөт



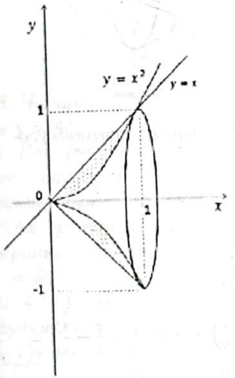
57-сүрөт

24. *Чыгаруу:*
$y = x^2, \ y = x$ *бул сызыктар менен чектелген фигуранын Ox огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин нерсенин көлөмү, конустун көлөмүнөн ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмүн кемиткенге барабар.(58-сүрөт)*

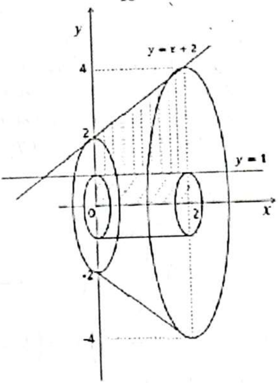
$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4\, dx = \left(\pi \cdot \frac{x^3}{3} - \pi \cdot \frac{x^5}{5}\right) \Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - 0\right) -$$

$$-\pi\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \pi\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{2}{15}\pi.$$

Жообу: $V = \frac{2}{15}\pi$ *куб бирдик.*



58-сүрөт



59-сүрөт

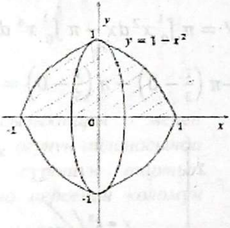
25. *Чыгаруу:* $y = x + 2, \ y = 1, \ x = 0, \ x = 2$ *сызыктары менен чектелген фигуранын көлөмү,* $y = x + 2, \ y = 1,$ $x = 0, \ x = 2$ *сызыктары чектелген трапециянын Ox огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмүнөн* $y = 1, y = 0, x = 0, x = 2$ *сызыктары менен чектелген тик бурчтуктун Ox огунун айланасында айлануусунан пайда болгон цилиндрдин көлөмүн кемиткенге барабар (59-сүрөт).*

$$V = \pi \int_0^2 (x+2)^2 - \pi \int_0^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2+4x+4)dx - \pi \int_0^2 dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 - \pi x\Big|_0^2 = \pi\left(\frac{2^3}{3} + 2\cdot 2^2 + 4\cdot 2\right) - 0 - \pi\,\cdot$$

$$\cdot\, 2 + 0 = \pi\left(\frac{8}{3} + 8 + 8 - 2\right) = 16\frac{2}{3}\pi = \frac{50}{3}\pi.$$

Жообу: $V = \frac{50}{3}\pi$ *куб бирдик.*



60-сүрөт

26. Чыгаруу:

$y = 1 - x^2$, $y = 0$ *сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ох огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмү төмөнкүгө барабар.*

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx =$$

$$= \pi\left(x - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \pi\left(1 - 2\cdot\frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5}\right) -$$

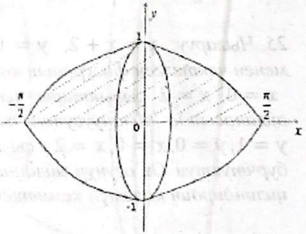
$$-\pi\left((-1) - 2\cdot\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5}\right) = \pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \pi\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= \pi\cdot\frac{8}{15} - \pi\left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{16}{15}\pi.$$ *Жообу:* $V = \frac{16}{15}\pi$ *куб бирдик.*

27. Чыгаруу: $y = cosx$,

$y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$

сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапецияны чийип алабыз. Анын Ох огунун айланасында айлануусунан пайда болгон нерсенин көлөмү төмөнкүдөй табылат.



61-сүрөт

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2x}{2} dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2x\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} sin2x\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} sin2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-\pi \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} sin2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{4} - 0\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2};$$

Жообу: $V = \frac{\pi^2}{2}$ *куб бирдик.*

2.1. Көрсөткүчтүү функциялар.

28. Чыгаруу:

а) $y = 4^x$;

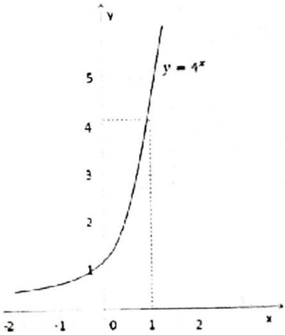
1) Бул функциянын аныкталуу областы $D(x) = R$, *бардык чыныгы сандар,*

2) $4x$ *функциясынын маанилеринин областы* $E(4^x) = R_+$;

3) $4 > 1$ *болгондуктан бул функция өсүүчү.*

4) Графигин түзөбүз:

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{4}$	1	4



62-сүрөт

б) Чыгаруу: $y = 0{,}3^x$;

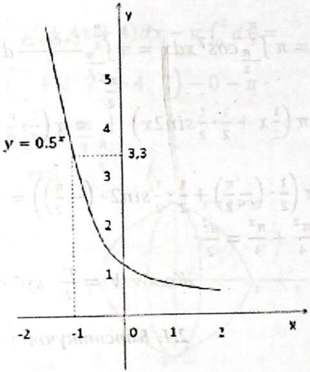
1) Аныкталуу областы $D(0{,}3^x) = R$.

2) Маанилеринин областы $E(0{,}3^x) = R_+$.

3) $0{,}3 < 1$ *болгондуктан функция кемүүчү.*

4) *Графигин түзөбүз:*

x	-1	0	1
y	$3\frac{1}{3}$	1	$0,3$



63-сүрөт

в) Чыгаруу:

$y = \left(\sqrt{3}\right)^x;$

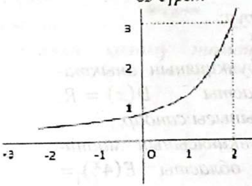
1) *Аныкталуу областы* $D\left(\sqrt{3}^x\right) = R,$

2) *Маанилеринин областы* $E\left(\sqrt{3}^x\right) = R_+$

3) $\sqrt{3} > 1$ *болгондуктан* $(\sqrt{3})^3$ *функциясы өсүүчү,*

4) *Графигин түзөбүз:*

x	-1	0	1	2	3
y	$0,6$	1	$1,7$	3	$5,1$



64-сүрөт

г) Чыгаруу:

$y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x.$

1) *Аныкталуу областы* $D\left((\frac{1}{\sqrt{3}})^x\right) = R,$

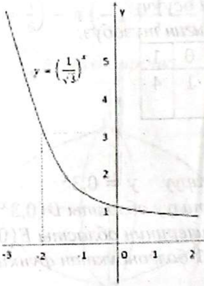
2) *Маанилеринин областы* $E(y) = R_+,$

3) $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ *болгондуктан бул функция кемүүчү,*

4) *Графигин түзөбүз:*

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1,7} \approx 0,6$

x	-2	-1	0	1	2
y	3	$1,7$	1	$0,6$	$0,3$

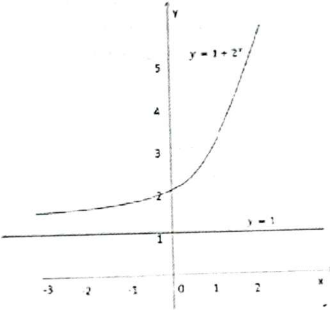


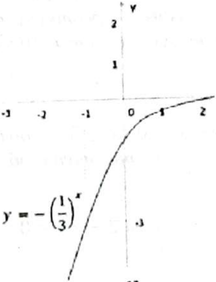
65-сүрөт

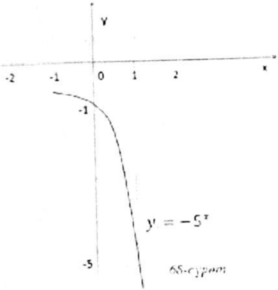
29. *а) Чыгаруу:*

$y = 1 + 2^x$

функциясынын болжолдуу графигин чийип алабыз. Графикке байкоо жүргүзсөк, бул функциянын маанилеринин областы $E(y) = (1; +\infty)$ *болот.*







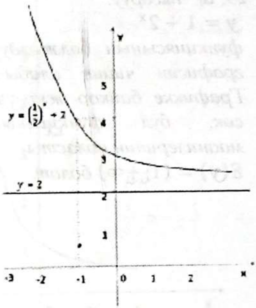
67-сүрөт

68-сүрөт

б) Чыгаруу: $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ *функциясынын графигин чийебиз.(67-сүрөт) Графиктен көрүнүп тургандай функциянын маанилеринин көптүгү* $E(y) = (-\infty; 0)$

в) Чыгаруу: $y = -5^x$ *функциясынын графигин чийип алабыз. (68-сүрөт) Бул функциянын маанилеринин көптүгү* $E(y) = = (-\infty; 0)$.

г) Чыгаруу: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, *бул функциянын маанилеринин областы* $E(y) = (2; +\infty)$.



69-сүрөт

30. а) Чыгаруу: $y = 2^{x-3}$, *бул функциянын көрсөткүчү бүтүн туюнтма, ошондуктан анын аныкталуу областы* $D(y) = R$, *чыныгы сандардын көптүгү.*

б) Чыгаруу:
$y = 3^{\sqrt{5-x}}$, $3^{\sqrt{5-x}}$*туюнтмасы* $5 - x \geq 0$, $x \leq 5$ *болгондо мааниге ээ болот. Демек бул функциянын аныкталуу областы* $D = (-\infty; 5]$ *болот.*

в) Чыгаруу: $y = 5^{\sqrt{2-x^2}}$, $\sqrt{2-x^2}$*туюнтмасы* $2 - x^2 \geq 0$ *болгондо мааниге ээ болот.*

$$(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} - x \geq 0 \\ \sqrt{2} + x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \sqrt{2} \\ x \geq -\sqrt{2}; \end{cases}$$

Демек, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, $5^{\sqrt{2-x^2}}$ *функцясынын аныкталуу областы* $D(y) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ *кесиндиси болот.*

г) Чыгаруу: $y = 4^{\frac{1}{x+5}}$, $4^{\frac{1}{x+5}}$ *туюнтмасы* $x + 5 \neq 0$ *болгондо мааниге ээ болот.*
$x + 5 = 0$ $x = -5$ *демек, бул функциянын аныкталуу областы –5 тен башка бардык чыныгы сандар. б.а.* $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

2.2. Көрсөткүчтүү теңдемелер.

31. Чыгаруу: а) $27^{x-2} = 3^{2x-3}$, $27 = 3^3$ *болот,*

$$3^{3(x-2)} = 3^{2x-3},$$

$$3x - 6 = 2x - 3,$$

$3x - 2x = 6 - 3$, $x = 3$; *Жообу:* $x = 3$.

Чыгаруу: б) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; $\sqrt{2x \cdot 3x} = 36$,

$$\sqrt{6^x} = 6^2, \qquad 6^{\frac{x}{2}} = 6^2,$$

$$\frac{x}{2} = 2, \qquad x = 4.$$ *Жообу:* $x = 4$.

Чыгаруу: в) $(\frac{2}{3})^x \cdot (\frac{9}{8})^x = \frac{27}{64}$, $(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8})^x = \frac{27}{64}$,

$$(\frac{3}{4})^x = \frac{3^3}{4^3}, \qquad (\frac{3}{4})^x = (\frac{3}{4})^3$$

$x = 3$ *Жообу:* $x = 3$.

Чыгаруу: г) $(\frac{1}{5})^{4x^2+2x-1} = (\frac{\sqrt{5}}{5})^2$, $(\frac{\sqrt{5}}{5})^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$,

$$(\frac{1}{5})^{4x^2+2x-1} = (\frac{1}{5})^1,$$

$$4x^2 + 2x - 1 = 1,$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0,$$

$$2x^2 + x - 1 = 0, \quad D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9,$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Жообу: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$.

32. Чыгаруу: а) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;

$$7^2 \cdot 7^x + 2 \cdot 7^{-1} \cdot 7^x = 345,$$

$$49 \cdot 7^x + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7^x = 345,$$

$$343 \cdot 7^x + 2 \cdot 7^x = 2415$$

$$345 \cdot 7^x = 2415$$

$$7^x = 2415 : 345$$

$$7^x = 7$$

$$x = 1$$

Жообу: $x = 1$

б) Чыгаруу: $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$;

$$7 \cdot 5^x - 5^2 \cdot 5^x = -90,$$
$$7 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x = -90,$$
$$-18 \cdot 5^x = -90,$$
$$5^x = -90 : (-18),$$
$$5^x = 5,$$
$$x = 1. \text{ \textit{Жообу:} } x = 1.$$

в) Чыгаруу: $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$;

$$2 \cdot 3 \cdot 3^x - 3^x = 15,$$
$$6 \cdot 3^x - 3^x = 15,$$
$$5 \cdot 3^x = 15,$$
$$3^x = 15 : 5,$$
$$3^x = 3,$$
$$x = 1. \quad \text{Жообу: } x = 1.$$

г) Чыгаруу: $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77.$

$$3 \cdot 5^3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5 \cdot 5^x = 77,$$
$$3 \cdot 125 \cdot 5^x + 10 \cdot 5^x = 77,$$
$$375 \cdot 5^x + 10 \cdot 5^x = 77,$$
$$385 \cdot 5^x = 77,$$
$$5^x = \frac{77}{385},$$
$$5^x = \frac{1}{5}$$
$$5^x = 5^{-1},$$
$$x = -1. \quad \text{Жообу: } x = -1.$$

д) Чыгаруу: $5^{2+4+6+\cdots+2x} = 5^{56}$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2x = 56 \text{ же}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + x = 28$$

Теңдеменин оң жагы арифметикалык прогрессия болуп эсептелет. $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ *формуласы боюнча* $\frac{1+x}{2} \cdot x = 28$ *теңдемесин алабыз.*

$$x^2 + x - 56 = 0.$$
$$D = -1 + 224 = 225$$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}$; $\quad x_1 = \frac{-1+15}{2} = \frac{14}{2} = 7,$

$x_2 = \frac{-1-15}{2} = \frac{-16}{2} = -8$ *чыгарылыш болбойт.*

Жообу: $x = 7$.

33. *Чыгаруу: а)* $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0;$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0,$$

$3^x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$$t^2 - 8 \cdot t - 9 = 0, \quad D = 64 - 4 \cdot 9 = 64 + 36 = 100,$$

$$t_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}; \quad t_1 = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9, \quad t_2 = \frac{8-10}{2}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1,$$

Демек, $3^x = 9,$ $\quad 3^x = -1$ *теңдемеси чыгарылышка ээ болбойт.*

$3^x = 3^2, \quad x = 2.$

Жообу: $x = 2.$

б) Чыгаруу: $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0;$

$3^{\sqrt{x}} = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$$y^2 - 4y + 3 = 0, \quad D = 16 - 12 = 4,$$

$$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}; \quad t_1 = \frac{4+2}{2} = 3; \quad t_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Демек, $3^{\sqrt{x}} = 3, \quad 3^{\sqrt{x}} = 1,$

$\sqrt{x} = 1, \quad 3^{\sqrt{x}} = 3^0,$

$x = 1, \quad \sqrt{x} = 0,$

$x = 0.$

Жообу: $x = 1, \; x = 0.$

в) Чыгаруу: $2^{2+x} - 2^{2-x} = 6;$

$$2^2 \cdot 2^x - 2^2 \cdot \frac{1}{2^x} = 6,$$

$4 \cdot 2^{2x} - 4 = 6 \cdot 2^x; \quad 4 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 4 = 0, \quad 2^x = t$ *жаңы өзмөсүн киийребиз*

$4 \cdot t^2 - 6 \cdot t - 4 = 0, \; D = 36 + 64 = 100,$

$$t_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{6 \pm 10}{8}; \quad t_1 = \frac{6+10}{8} = \frac{16}{8} = 2, \quad t_2 = \frac{6-10}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

демек, $2^x = 2,$ $\quad 2^x = -\frac{1}{2}$ *чыгарылышка ээ болбойт.*

$x = 1. \quad$ Жообу: $x = 1.$

г) Чыгаруу: $\quad 9^{\sqrt{x-1}} - 3^{\sqrt{x-1}} = 72, \quad 3^{2\sqrt{x-1}} - 3^{\sqrt{x-1}} = 72.$

$t = 3^{\sqrt{x-1}}; \; t^2 - t - 72 = 0, \; t_1 = 9, \; t_2 = -8.$

$3^{\sqrt{x-1}} = 9, \; \sqrt{x-1} = 2, \; x - 1 = 4, \; x = 5.$

Жообу: $x = 5.$

34. Теңдемелердин системаларын чыгаргыла:

Чыгаруу: а) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ \quad x - y = 1; \end{cases}$

$x = 1 + y$ *x ти y аркылуу туюнтуп алабыз, аны биринчи теңдемедеги x тин ордуна коебуз.*

$5^{1+y} - 5^y = 100,$

$5 \cdot 5^y - 5^y = 100,$

$4 \cdot 5^y = 100,$

$5^y = 100 : 4,$

$5^y = 25,$

$5^y = 5^2,$

$y = 2$, *эми x ти таап алабыз.*

$$x = 1 + 2 = 3.$$

Жообу: $x = 3,\ y = 2.$

Чыгаруу: б) $\begin{cases} 3^{3y-x} = \sqrt{3}, \\ 7^{x-2y+1} = 49; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3^{3y}}{3^x} = \sqrt{3}, \\ 7 \cdot \dfrac{7^x}{7^{2y}} = 49; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{3y} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x, \\ 7 \cdot 7^x = 49 \cdot 7^{2y}; \end{cases}$

$\begin{cases} 3^{3y} = 3^{\frac{1}{2}+x}, \\ 7^x = 7^{2y+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} 3y = \frac{1}{2} + x, \\ x = 2y + 1\ ; \end{cases}$

$3y = \frac{1}{2} + 2y + 1,$

$3y - 2y = \frac{3}{2},$

$y = \frac{3}{2}.$ *Эми x тин маанисин табабыз*

$x = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 3 + 1 = 4.$

Жообу: $x = 4,\ y = \frac{3}{2}.$

Чыгаруу: в) $\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 56, \\ 2^y \cdot 7^{x-2} = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 2^3 \cdot 7\ , \\ 2^y \cdot 7^{x-2} = 2 \cdot 7; \end{cases}$ *Бул теңдемелер системасындагы теңдемелердин оң жана сол жактарына байкоо жүргүзүп, көбөйтүндүнүн жана даражалардын барабардык касиеттерин эске алсак x=3, y=1 экендиги келип чыгат.*

Жообу: x=3, y=1.

Чыгаруу: *г)* $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{6^{3x}}{6^y} = 6^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{2^y}{2^{2x}} = 2^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$ $\begin{cases} 6^{3x} = 6^{\frac{1}{2}+y}, \\ 2^y = 2^{2x-\frac{1}{2}}, \end{cases}$

$\begin{cases} 3x = \frac{1}{2} + y \ , \\ y = 2x - \frac{1}{2}, \end{cases}$ *Экинчи теңдемедеги у тин маанисин биринчи*

$3x = \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2}$ *теңдемеге коебуз.*

$3x - 2x = 0,$

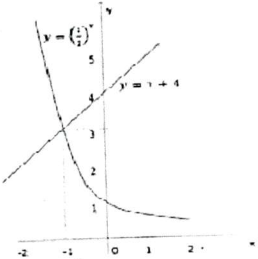
$x = 0.$ *Демек,* $y = 2 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Жообу: $x = 0, y = -\frac{1}{2}.$

35. *Чыгаруу:* *а)* $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4,$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ *жана* $y = x + 4$ *функцияларынын графиктерин чийип алабыз. Бул графиктердин кесилишкен чекитинин абсциссасы теңдеменин чыгарылышы болот. Демек, теңдеменин тамыры x=1.*

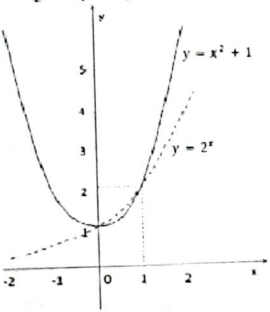
Жообу: x=1.



Чыгаруу: *б)* $2^x = x^2 + 1,$

$y = 2^x$ *жана* $y = x^2 + 1$ *функцияларынын графиктерин чийип алабыз. Функциялардын графиктери абсциссалары x=0 жана x=1 чекиттеринде кесилишти. Демек, теңдеменин тамырлары x=0, x=1 болот.*

Жообу: x=0, x=1.



71-сүрөт

2.4. – 2.5. Логарифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар.

36. *Чыгаруу:* $log_a a = 1$, $log_a l^n = n \, log_a b$ *формулаларын колдонобуз.*

а) $log_5 125 = log_5 5^3 = 3log_5 5 = 3;$

б) $log_3 81 = log_3 3^4 = 4 \cdot log_3 3 = 4;$

в) $log_{0,5} 0,25 = log_{0,5}(0,5)^2 = 2log_{0,5} 0,5 = 2;$

г) $log_2 \frac{1}{16} = log_2 2^{-4} = -4 \cdot log_2 2 = -4;$

д) $log_{\frac{1}{3}} 27 = log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{-3} = -3log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = -3;$

е) $log_7 \frac{1}{7} = log_7 7^{-1} = -1 \cdot log_7 7 = -1;$;

ж) $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^5 = 5log_{\frac{1}{2}} = 5;$

з) $log_{\frac{1}{3}} 81 = log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{-4} = -4 \cdot log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = -4;$

и) $log_{0,5} 16 = log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^{-4} = -4log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = -4.$

37. Чыгаруу: $a^{log_a b} = b$ *жана* $a^{n\, log_a b} = b^n$ *теңдештиктерин колдонобуз.*

а) $2^{log_2 15} = 15;$

б) $7^{log_7 3} = 3;$

в) $5^{3log_5 2} = 2^3 = 8$

г) $9^{log_3 8} = 8^2 = 64;$

д) $8^{log_2 5} = 2^{3log_2 5} = 5^3 = 125;$

е) $\frac{1}{2}^{6log_{\frac{1}{2}} 2} = 2^6 = 64.$

38. Чыгаруу: Логарифманын аныктамасын пайдаланабыз.

а) $log_5 x = 3;$

$x = 5^3,$

$x = 125.$

б) $log_3(2x + 1) = 4;$

$2x + 1 = 3^4,$

$2x = 81 - 1,$

$2x = 40,$

$x = 40 : 2,$

$x = 20.$

в) $log_{\frac{1}{3}} x = -2,$

$x = (\frac{1}{3})^{-2}$

$x = 3^2$

$x = 9$

г) $log_x 64 = 2$

$x^2 = 64,$

$x = \sqrt{64},$

$x = 8.$

д) $log_x \frac{1}{9} = 2$

$x^2 = \frac{1}{9}$

е) $log_x \frac{1}{125} = -3$

$x^{-3} = \frac{1}{125},$

$x = \sqrt{\frac{1}{9}}$ $\quad (\frac{1}{x})^3 = \frac{1}{125},$

$x = \frac{1}{3};$ $\quad \frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}},$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{5},$

$x = 5.$

39. Чыгаруу:

а) $3^x = 5;$

$log_3 3^x = log_{3^5},$

$xlog_{3^3} = log_{3^5},$

$x = log_{3^5}.$

Жообу: $x = log_{3^5}.$

б) $2^{3x-1} = 7;$

$log_2 2^{3x-1} = log_2 7.$

$(3x-1)log_2 2 = log_2 7.$

$3x - 1 = log_2 7.$

$3x = log_2 7 + 1.$

$x = \frac{log_2 7+1}{3}.$

Жообу: $\frac{log_2 7+1}{3}.$

в) $25^x = -4 \cdot 5^x - 5 = 0;$

$5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

$5^x = t$

$t^2 - 4 \cdot t - 5 = 0$

$D = 16 + 20 = 36$

$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$

$t_1 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$t = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Демек, $5^x = 5$

$x = 1$

Жообу: $x = 1$

г) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5 = 0.$

$2^x = t$

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$D = 36 - 20 = 16$

$t_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$

$t_1 = \frac{6+4}{2} = 5, \ t_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Демек, $2^x = 5, \ 2^x = 1$

$log_{2^{2^x}} = log_2^5, \ log_{2^{2^x}} = log_2^1,$

$xlog_{2^2} = log_2^5, \ xlog_{2^2} = log_2^1$

$x = log_{2^5}, \quad x = 0$

Жообу: $x = log_{2^5}, \quad x = 0$

40. Чыгаруу:

а) $log_5(14 - x)$ *туюнтмасы мааниге ээ болуш үчүн* $14 - x > 0$, *болуш керек*

$0 < x < 14.$

Жообу: $0 < x < 14.$

б) $log_{12}\left(\frac{7}{5x-4}\right)$ *туюнтмада* $5x - 4 > 0$, *болгондо туюнтма мааниге ээ болот* $5x > 4$, $x > \frac{4}{5}.$

Жообу: $x > \frac{4}{5}.$

в) $log_2(x^2-25)$, *туюнтмасында* $x^2-25>0$ *болгондо туюнтма мааниге ээ болот.*

$(x-5)(x+5)>0$, $\begin{cases} x-5>0 \\ x+5>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>5 \\ x>-5, \end{cases}$ $x>5$ *жана*

$\begin{cases} x-5<0 \\ x+5<0, \end{cases}$ $\begin{cases} x<5 \\ x<-5, \end{cases}$ $x<-5$.

Жообу: $x>5$ *жана* $x<-5$.

г) $log_4 \frac{x-6}{3x-5}$ *туюнтмасында* $\frac{x-6}{3x-5}>0$ *болгондо туюнтма маанигеэз болот.*

$\begin{cases} x-6>0 \\ 3x-5>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>6 \\ x>\frac{5}{3}, \end{cases}$ $x>6$.

$\begin{cases} x-6<0 \\ 3x-5<0, \end{cases}$ $\begin{cases} x<6 \\ x<\frac{5}{3}, \end{cases}$ $x<\frac{5}{3}$. *Жообу:* $x>6$ *жана* $x<\frac{5}{3}$.

41. Чыгаруу:

а) $log_{9^{27}} + log9^3 = log_{9^{(27\cdot3)}} = log_{9^{81}} = 2;$

б) $log_6 72 + log_6 \frac{1}{2} = log_6\left(72\cdot\frac{1}{2}\right) = log_6 36 = 2;$

в) $log_{14}\sqrt[3]{196} = log_{14}\sqrt[3]{14^2} = log_{14}14^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}log_{14}14 = \frac{2}{3}\cdot1 = \frac{2}{3};$

г) $log_5 250 - log_{5^2} = log_5(250:2) = log_5 125 = 3;$

д) $log_3\frac{1}{\sqrt[3]{81}} = log_3\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} = log_3\frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} = log_3 3^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}log_{3^3} = -\frac{4}{3};$

е) $log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{81} = log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{3^4} = log_{\frac{1}{3}}3^{\frac{4}{3}} = log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = -\frac{4}{3};$

ж) $\frac{log_2 9}{log_2 27} = \frac{log_2 3^2}{log_2 3^3} = \frac{2log_2 3}{3log_2 3} = \frac{2}{3};$

з) $\frac{log_7 81 - log_7 3}{log_7 9} = \frac{log_7(81:3)}{log_7 9} = \frac{log_7 27}{log_7 9} = \frac{log_7 3^3}{log_7 3^2} = \frac{3log_7 3}{2log_7 3} = \frac{3}{2}.$

42. Чыгаруу:

а) $log_7 x = log_7 31 + log_7 5,$ $log_7 x = log_7 155,$ $x = 155.$ *Жообу:* $x = 155.$	*б)* $log_2 x = log_2 120 - log_2 3$ $log_2 x = log_2(120:3)$ $log_2 x = log_2 40$ $x = 40$

	Жообу: $x = 40$
в) $log_5 x = 2\,log_5 7 + 3\,log_5 2$ $log_5 x = log_5 7^2 + log_5 2^3$ $log_5 x = log_5(49 \cdot 8)$ $log_5 x = log_5 392$ $x = 392$ *Жообу:* $x = 392$	*г)* $log_x 25\sqrt{5} = -\frac{5}{8}$, $x^{-\frac{5}{8}} = 25\sqrt{5}$ *аныктама боюнча. Эми барабардыктын эки жагын тең 5 негизги боюнча логорифмалайбыз.* $log_5 x^{-\frac{5}{8}} = log_5 5^{\frac{5}{2}}$, $-\frac{5}{8} log_5 x = \frac{5}{2}$, $log_5 x = \frac{5}{2} : \left(-\frac{5}{8}\right)$, $log_5 x = -4$, $x = 5^{-4}$, $x = \frac{1}{625}$. *Жообу:* $x = \frac{1}{625}$.

43. Чыгаруу:

а) $lg100 = lg\,10^2 = 2\,lg\,10 = 2 \cdot 1 = 2$;

б) $lg0{,}01 = lg\,10^{-2} = -2 \cdot lg\,10 = -2 \cdot 1 = -2$;

в) $lg40\,lg(4 \cdot 10) = lg\,4 + lg\,10 = lg\,2^2 + lg\,10 = 2\,lg\,2 + 1 \approx$
$\approx 2 \cdot 0{,}301 + 1 \approx 1{,}602$;

г) $lg\frac{2}{3} lg\frac{2}{3} = lg\,2 - lg\,3 \approx 0{,}301 - 0{,}4771 \approx -0{,}1761$;;

д) $lg147 = lg(3 \cdot 49) = lg\,3 + lg\,7^2 \approx 0{,}4771 + 2 \cdot lg\,7 =$
$= 0{,}4771 + 2 \cdot 0{,}8451 \approx 0{,}4771 + 1{,}6902 \approx 2{,}1673$;

е) $lg210 = lg(3 \cdot 7 \cdot 10) = lg\,3 + lg\,7 + lg\,10 \approx 0{,}4771 +$
$+0{,}8451 + 1 \approx 2{,}3222$.

44. Чыгаруу:

а) $ln6 = ln(2 \cdot 3) = ln\,2 + ln\,3 \approx 0{,}6931 + 1{,}0986 = 1{,}7917$,;

б) $ln105 = ln\,(3 \cdot 5 \cdot 7) = ln\,3 + ln\,5 + ln\,7 \approx 1{,}0986 +$
$+1{,}6094 + +1{,}9459 \approx 4{,}6539$;

в) $ln105 = ln3 \cdot ln5 \cdot ln7 = 1{,}0986 + 1{,}6094 + 1{,}9459 =$
$= 4{,}6539$;

г) $ln1000 = ln\,10^3 = 3 \cdot ln\,10 \approx 3 \cdot 2{,}3255 \approx 6{,}9765$;

д) $ln300 = ln(3 \cdot 100) = ln\,3 + ln\,100 = ln\,3 + 2 \cdot ln\,10 \approx$
$\approx 1{,}0986 + 2 \cdot 2{,}3255 \approx 1{,}0986 + 4{,}651 \approx 5{,}7496$;

е) $ln1750 = ln(5^3 \cdot 7 \cdot 2) = ln\,5^3 + ln\,7 + ln\,2 \approx 3 \cdot 1{,}6094 +$
$+1{,}9459 + 0{,}6931 \approx 7{,}4672$.

45. Чыгаруу:

а) $(\sqrt[3]{a^2b})^{\frac{3}{5}}$; $log_3(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}} = log_3\left(a^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{1}{5}}\right) = log_3 a^{\frac{2}{5}} + log_3 b^{\frac{1}{5}} ==$

$\frac{2}{5}log_3 a + \frac{1}{5}log_3 b;$

б) $lg_3(\frac{a^8}{\sqrt[5]{b^4}})^{-0,4} = -0,4log_3\frac{a^8}{b^{\frac{4}{5}}} = -0,4\left(a^8 - b^{\frac{4}{5}}\right) =$

$= -0,4\left(8log_3 a - \frac{4}{5}\right) = -3,2\,lg_3 a + 0,32log_3 b$.

46. Чыгаруу:

а) $lg1000\sqrt{a^3b^5c} = lg(1000\cdot\sqrt{a^3b^5c} =$

$= lg\,1000 + lg\left(a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{5}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}}\right) = 3 + lg\,a^{\frac{3}{2}} + lg\,b^{\frac{5}{2}} + lgc^{\frac{1}{2}} = 3 +$

$+\frac{3}{2}lg\,a + \frac{5}{2}lg\,b + \frac{1}{2}lg\,c\,;$

б) $lg\frac{b^{\frac{3}{5}}}{10^3a^5c^4} = lg\,b^{\frac{3}{5}} - lg(10^3a^5c^4) = \frac{3}{5}lg\,b - (lg\,10^3 + lg\,a^5 +$

$+lg\,c^4) = \frac{3}{5}lg\,b - 3 - 5\,lg\,a - 4\,tg\,c.$

47. Чыгаруу: а) $y = log_7(2x-5)$ *Бул функция* $2x-5>0$ *барабарсыздыгын канаатандырган x тин маанилери үчүн аныкталган.*

$2x-5>0$

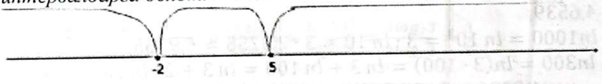
$2x>5$

$x>\frac{5}{2}$ *демек* $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$ *интервалы аныкталуу областы болот.*

Жообу: $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

Чыгаруу: б) $y = log_{0,8}(x^2-3x-10)$ *логарифмалык функциялык аныкталуу областы барбык оң сандардын көптүгү болгондуктан* $x^2-3x-10>0$ *болуш керек.*

$x^2-3x-10=0$ *теңдемесинин тамырын таап алабыз. Алар* $x_1=5$ *жана* $x_2=-2$ *болот. Бул сандар сан огун төмөндөгүдөй интервалдарга бөлөт.*



72-сурет

$(-\infty;-2), (-2;5), (5;+\infty)$. *интервалдар методун колдонуп, барабарсыздыктын чыгарылышы*

$(-\infty;-2)U(5;+\infty)$ *көптүгү боло тургандыгын табабыз.*

Жообу: $D(y) = (-\infty; -2)U(5; +\infty)$;

48. *Чыгаруу:* *а)* $y = log_7 \frac{2}{5}$ *жана* $y = log_7 \frac{5}{2}$; *берилген логарифмдердин негизи* $7 > 1$ *болгондуктан* $log_7 x$ *функциясы өсүүчү болот. Бул мисалда* $\frac{2}{5} < \frac{5}{2}$ *болгондуктан* $log_7 \frac{2}{5} < log_7 \frac{5}{2}$ *болот*

Жообу: $log_7 \frac{2}{5} < log_7 \frac{5}{2}$.

Чыгаруу: *б)* $y = log_{\frac{1}{5}} 10$ *жана* $y = log_{\frac{1}{5}} 3$; *бул логарифмдердин негизи* $\frac{1}{5} < 1$, *демек,* $log_{\frac{1}{5}} x$ *функциясы кемүүчү.*

Анда $log_{\frac{1}{5}} 10 < log_{\frac{1}{5}} 3$ *болот.*

Жообу: $log_{\frac{1}{5}} 10 < log_{\frac{1}{5}} 3$.

Чыгаруу: *в)* $y = log_{5^{20}}$ *жана* $y = log_{7^{20}}$; *бул логарифмдерди бирдей негизге келтиребиз.*

$log_7 \ 20 = \frac{log_5 20}{log_5 7} = log_5 20 \cdot \frac{1}{log_5 7}$;

Демек, $log_5 \ 20 > \frac{1}{log_5 7} \cdot log_5 20$. *анткени* $\frac{1}{log_5 7} < 1$;

Жообу: $log_5 20 > log_7 20$;

Чыгаруу: *г)* $y = log_{0,2^8}$ *жана* $y = log_{0,6^8}$; *бул логарифмдерди негизи* 0,2 *болгон, бирдей негизге келтиребиз.*

$log_{0,6^8} = \frac{log_{0,2^8}}{log_{0,2^{0,6}}}$, *негиз* $0,2 < 1$ *болгондуктан* $log_{0,2^8} < 0$.

$0 < log_{0,2} 0,6 < 1$ *болот. Демек,* $log_{0,2} 8 < \frac{log_{0,2} 8}{log_{0,2} 0,6}$

Жообу: $log_{0,2} 8 > log_{0,6} 8$.

49. *Чыгаруу: Логарифмалык функциясынын 3–4-касиеттерин пайдаланабыз.*

а) $log_9 15 > 0$; *в)* $log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} > 0$;

б) $log_{0.3} 25 < 0$; *г)* $log_7 \frac{1}{5} < 0$.

Логорифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар.

50. *Чыгаруу:*

а) $7^x = 0{,}5$, *теңдеменин эки жагын тең 7 негизи боюнча логарифмалайбыз.* $log_7 7^x = log_7 0{,}5$, $xlog_7 7 = log_7 0{,}5$, $x = log_7 0{,}5$. *Жообу:* $x = log_7 0{,}5$.	*б)* $3^x = 25$, $log_3 3^x = log_3 25$, $xlog_3 3 = log_3 25$, $x = log_3 25$. *Жообу:* $x = log_3 25$.
в) $10^x = \pi$ $lg10^x = lg\pi$ $xlg10 = lg\pi$ *Жообу:* $lg\pi$	*г)* $0{,}9^x = 8$ $log_{0,9} 0{,}9^x = log_{0,9} 8$ $xlog_{0,9} 0{,}9 = log_{0,9} 8$ $x = log_{0,9} 8$ *Жообу:* $x = log_{0,9} 8$

51. Чыгаруу:

а) $log_3(5x - 11) = 2$, $5x - 11 = 3^2$, $5x = 9 + 11$, $5x = 20$ $x = 20:5$ $x = 4$ *Жообу:* $x = 4$	*б)* $log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) = -3$, $3x + 2 = (\frac{1}{2})^{-3}$, $3x + 2 = 8$, $3x = 8 - 2$, $3x = 6$, $x = 6:3$, $x = 2$. *Жообу:* $x = 2$.
в) $log_{x+1}(x^2 + 3x - 9) = 2$, $x^2 + 3x - 9 = (x + 1)^2$, $x^2 + 3x - 9 = x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 3x - x^2 - 2x = 1 + 9$, $x = 10$. *Жообу:* $x = 10$.	*г)* $log_2(9 - 2^x) = 3 - x$. $9 - 2^x = 2^{3-x}$, $9 - 2^x = 2^3 \cdot 2^{-x}$, $9 - 2^x = 8 \cdot \frac{1}{2^x}$ $9 \cdot 2^x - 2^{2x} = 8$ $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ $2^x = t$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.* $t^2 - 9t + 8 = 0$ *бул теңдемени тамырлары* $t_1 = 3,\ t_2 = 1$,

$2^x = 2^3, \quad x = 0,$ *болот*

$x = 3;$ *Жообу:* $x_1 = 3; \quad x = 0.$

52. *Чыгаруу:*

а) $log_5 x = 2\, log_5 2 + log_5 3,$

$log_5 x = log_5 2^2 + log_5 3,$

$log_5 x = log_5(4 \cdot 3),$

$x = 12.$

Жообу: $x = 12.$

в) $\frac{1}{2} log_2(x-4) + \frac{1}{2} log_2(2x-$

$-1) = log_2 3$

$log_2(x-4)^{\frac{1}{2}} + log_2(2x-1)^{\frac{1}{2}} =$

$= log_2 3$

$log_2 \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{2x-1} = log_2 3$

$\sqrt{(x-4)\cdot(2x-1)} = 3$

$2x^2 - 9x + 4 = 9$

$2x^2 - 9x - 5 = 0.$

$x_1 = 5; \quad x = -\frac{1}{2}.$

Жообу: $x = 5.$

б) $lg(x-9) + lg(2x-1) = 2,$

$lg(x-9)\,(2x-1) = lg\, 100$

$(x-9)(2x-1) = 100$

$2x^2 - 19x + 9 = 100$

$2x^2 - 19x + 728 = 0.$

$x_1 = 13, \quad x_2 = -\frac{7}{2},$

Жообу: $x = 13.$

г) $lg(x^2+3x-5) - lg(x-2) = 0,$

$lg \frac{x^2+3x-5}{x-2} = lg\, 1,$

$\frac{x^2+3x-5}{x-2} = 1$

$x^2 + 3x - 5 = x - 2$

$x^2 + 2x - 3 = 0.$

$x_1 = 1, \quad x = -3.$

Жообу: $x = 1. \quad x = -3.$

53. *Чыгаруу:*

а) $lg^2 x - lg x^2 + 1 = 0,$

$lg^2 x - 2lg x + 1 = 0,$

$lg x = y$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.*

$y^2 - 2y + 1 = 0, \qquad D = 4 - 4 = 0, \qquad y_1 = \frac{2}{2} = 1,$

$lg x = 1, \;\; lg x = lg 10, \;\; x = 10.$ *Жообу:* $x = 10.$

б) $3lg^2(x-1) - 10\, lg(x-1) + 3 = 0$

$lg(x-1) = t$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.*

$3t^2 - 10t + 3 = 0, \;\; D = 100 - 36 = 64,$

$t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}, \quad t_1 = \frac{10+8}{6} = \frac{18}{6} = 3, \;\; t_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$

демек, $lg(x-1) = 3,$

$x - 1 = 10^3$

$x - 1 = 1000$

$x = 1001;$

$lg(x-1) = \frac{1}{3}$

$x - 1 = 10^{\frac{1}{3}}$

$x - 1 = \sqrt[3]{10}$

$x = \sqrt[3]{10} + 1.$

Жообу: $x_1 = 1001;\ \ x_2 = \sqrt[3]{10} + 1.$

в) $log_3^2 x - \ log_3 x - 6 = 0,$

$log_3 x = y$ *жаңы өзгөрмө киййребиз.*

$y^2 - y - 6 = 0, \quad D = 1 + 24 = 25,$

$y_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}, \quad y_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad y_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2;$

$log_3 x = 3 \qquad\qquad log_3 x = -2$

$log_3 x = log_3^{27} \qquad\qquad x = 5^2$

$x = 27; \qquad\qquad x = \frac{1}{9}$

Жообу: $x_1 = 27;\ x_2 = \frac{1}{9};$

г) $log_4^2 x + \ log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0,$

$log_4^2 x + log_4 x^{\frac{1}{2}} - 1{,}5 = 0$

$log_4^2 x + \frac{1}{2} log_4 x - 1{,}5 = 0$

$$2log_4^2 x + log_4 x - 3 = 0$$

$$2log_4^2 x + 2log_4\ x - 3 = 0.$$

$log_4 x = t$ *жаңы өзгөрмө киййребиз*

$2t^2 + t - 3 = 0, \qquad D = 1 + 24 = 25$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm 5}{4}; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{3}{2}.$$

$log_4 x = 1, \qquad\qquad log_4 x = -\frac{3}{2},$

$x = 4; \qquad\qquad x = x^{-\frac{3}{2}},$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{8};$$

Жообу: $\ x = 4;\ \ x_2 = \frac{1}{8}.$

54. *Чыгаруу: а)* $\frac{1}{lgx+1} + \frac{6}{lgx+5} = 1;$

$lg\,x + 1 \neq 0$ *жана* $lg\,x + 5 \neq 0$ *болгондуктан, теңдеменин эки жагын тең* $(lg\,x + 1)(lg\,x + 5)$*ке көбөйтөбүз.*

$$lg\,x + 5 + 6\,lg\,x + 6 = (lg\,x + 1)(lg\,x + 5)$$

$$lg^2\,x + lg\,x - 6 = 0,$$

$lg\,x = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киййребиз.*

$$t^2 - t - 6 = 0, \qquad D = 1 + 24 = 25$$

$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}; \quad t_1 = 3; \quad t_2 = -2;$

$$lg\,x = 3, \quad lg\,x = -2,$$

$$x = 10^3, \qquad x = 10^{-2},$$

$$x = 1000; \qquad x = \frac{1}{100}.$$

Жообу: $x = 1000; \quad x_2 = \frac{1}{100}.$

б) Чыгаруу: $\frac{1}{2}lg(2x-1) = 1 - lg\sqrt{x-9};$

$lg(2x-1)^{\frac{1}{2}} = lg\,10 - lg\,\sqrt{x-9},$

$lg\sqrt{2x-1} = lg\,\frac{10}{\sqrt{x-9}};$

$\sqrt{2x-1} = \frac{10}{\sqrt{x-9}},$ *Теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$(\sqrt{2x-1})^2 = (\frac{10}{\sqrt{x-9}})^2$

$2x-1 = \frac{100}{x-9}, \quad (2x-1)(x-9) = 100,$

$2x^2 - 19x + 9 - 100 = 0,$

$2x^2 - 19x - 91 = 0, \quad D = 361 + 728 = 1089.$

$$x_{1/2} = \frac{19 \pm \sqrt{1089}}{4} = \frac{19 \pm 33}{4}.$$

$$x_1 = \frac{19+33}{4} = \frac{52}{4} = 13; \;\; x_2 = \frac{19-33}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

Жообу: $x = 13.$

в) Чыгаруу: $3log_2^2 sinx + \; log_2(1 - cos2x) = 2;$

$sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-cosx}{2},$ *формуласын пайдаланабыз.*

$3log_2^2 sinx + log_2 2 + log_2 2sin^2 x = 2,$

$3 \cdot log_2^2 sinx + log_2 2 + log_2 sin^2 x = 2,$

$3log_2^2 sinx + 1 + 2log_2 sinx - 2 = 0,$

$3log_2^2 sinx + 2log_2 sinx - 1 = 0,$

$log_2 sinx = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.*

$3t^2 + 2t - 1 = 0, \; D = 4 + 12 = 16,$

$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}; \; t_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}; \;\; t_2 = \frac{-2-4}{6} = -1;$

Демек, $log_2 sinx = -1$ $log_2 sinx = log_2 \frac{1}{2}$ $sinx = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^k \, arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \; k \epsilon z.$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \; k \epsilon z.$	$log_2 sinx = \frac{1}{3},$ $log_2 sinx = log_2 2^{\frac{1}{3}}$ $sinx = 2^{\frac{1}{3}}, \; sinx = \sqrt[3]{2}$ *Бул теңдеме чечимге ээ болбойт;*

Жообу: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$ анткени $\sqrt[3]{2} > 1.$

г) Чыгаруу: $log_2(25^{x+3}-1)=2+log_2(5^{x+3}+1)$

$log_2\left(5^{2(x+3)}-1\right)=log_2 4+log_2(5^{x+3}+1)$

$log_2\left(5^{2(x+3)}-1\right)=log_2 4\cdot(5^{x+3}+1)$

$5^{2(x+3)}-1=4\left(5^{(x+3)}+1\right)$

$5^{2(x+3)}-1=4\cdot 5^{x+3}+4$

$5^{2(x+3)}-1-4\cdot 5^{x+3}-4=0.$

$5^{2(x+3)}-4\cdot 5^{x+3}-5=0.$

$5^{x+3}=t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$t^2-4t-5=0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*

$D=16+20=36$

$t_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2};\ t_1=\frac{4+6}{2}=5;\ \ t_2=\frac{4-6}{2}=-1.$

Демек, $5^{x+3}=5$, $5^{x+3}=-1$ *бул теңдеме тамырга ээ болбойт.*

$x+3=1,$

$x=1-3$

$x=-2$

Жообу: $x=-2$.

55. *Чыгаруу:*

а) $log_x 2-log_4 x+\frac{7}{6}=0$ *бул теңдемени логарифмаларды бирдей негизге өткөрүү жолу менен чыгарабыз.*

$\frac{log_2^2}{log_2 x}-\frac{log_2 x}{log_2 4}+\frac{7}{6}=0.$

$\frac{1}{log_2 x}-\frac{log_2 x}{2}+\frac{7}{6}=0.$ *Теңдеменин эки жагын тең* $6log_2 x$ *ке көбөйтөбүз.*

$6-3log_2^2 x+7log_2 x=0,$

$3log_2^2 x-7log_2 x-6=0,$

$3t^2-7t-6=0,$ $log_2 x=t$ *жаңы өзгөрмө киийребиз. Бул теңдеменин тамырлары* $t_1=3,\ t_2=-\frac{2}{3}$ *болот.*

Демек,

$log_2 x=3,$ $\qquad$ $log_2 x=-\frac{2}{3}$

$x=2^3,$ $\qquad$ $x=2^{-\frac{2}{3}},$

$x=8.$ $\qquad$ $x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

Жообу: $x_1=8;\ x_2=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

б) Чыгаруу: $log_9 x + log_3 x = log_{\frac{1}{3}} 8.$

$\frac{log_3 x}{log_3 9} + log_3 x = \frac{log_3 8}{log_3 \frac{1}{3}},$

$\frac{log_3 x}{2} + log_3 x = \frac{log_3 8}{-1},$

$log_3 x + 2log_3 x = -2log_3 8,$

$3log_3 x = log_3 8^{-2},$

$log_3 x^3 = log_3 \frac{1}{64},$

$x^3 = \frac{1}{64}, x = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}.$

Жообу: $x = \frac{1}{4}.$

в) Чыгаруу: $log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4;$

$log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = log_4 4^{2x-4},$

$2 \cdot 4^{x-2} - 1 = 4^{2x-4},$

$4^{2(x-2)} - 2 \cdot 4^{x-2} + 1 = 0,$

$4^{x-2} = y$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз.*

$y^2 - 2 \cdot y + 1 = 0,\ D = 4 - 4 = 0,$

$y_1 = \frac{2}{2} = 1;$

Демек, $4^{x-2} = 1,$

$4^{x-2} = 4^0,$

$x - 2 = 0$

$x = 2.$

Жообу; $x = 2.$

г) *Чыгаруу:* $log_3 x + log_{\sqrt{x}} x - log_{\frac{1}{3}} x = 6$

$log_{\sqrt{x}} x = 2.$ *бул маанини теңдемеге коёбуз жана логарифмаларды бирдей негизге өткөрөбүз.*

$log_3 x + 2 - \frac{log_3 x}{log_3 \frac{1}{3}} = 6; \quad log_3 \frac{1}{3} = -1,$

$log_3 x + 2 + log_3 x = 6,$

$2\, log_3 x = 4,$

$log_3 x = 2,$

$x = 3^2,$

$x = 9.$

Жообу: $x = 9.$

56. Берилген теңдемелерди эки жагын тең логарифмалоо аркылуу чыгарабыз.

а) Чыгаруу: $x^{log_2 x-2} = 8,$
$log_2 x^{log_2 x-2} = log_2 8,$
$(log_2 x - 2) \cdot log_2 x = 3,$
$log^2{}_2 x - 2log_2 x - 3 = 0.$

$log_2 x = y$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.*

$y^2 - 2y - 3 = 0, \quad D = 4 + 12 = 16,$

$$y_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}, \quad y_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Демек, $log_2 x = 3, \qquad log_2 x = -1,$
$x = 2^3, \qquad x = 2^{-1},$
$x = 8, \qquad x = \frac{1}{2},$

Жообу: $x_1 = 8; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$

б) Чыгаруу: $x^{lg\, x} = 10000;$
$lg\, x^{lg\, x} = lg\, 10000,$
$lg\, x \cdot lg\, x = 4,$
$lg\, x = \pm\sqrt{4},$
$lg\, x = 2, \quad lg\, x = -2,$
$x = 10^2, \quad x = 10^{-2},$
$x = 100; \quad x = \frac{1}{100}.$

Жообу; $x_1 = 100; \qquad x_2 = \frac{1}{100}$

в) Чыгаруу: $x^{log_5 x} = 125x^2,$
$log_5 x^{log_5 x} = log_5 125 \cdot x^2,$
$log_5 x \cdot log_5 x = log_5 125 + log_5 x^2,$
$log^2{}_5 x = 3 + 2log_5 x,$
$log^2{}_5 x - log_5 x - 3 = 0,$

$log_5 x = t$ *өзгөрмөсүн кейиребиз.*

$t^2 - 2t - 3 = 0.$
$t_1 = 3; \quad t_2 = -1.$
Демек, $log_5 x = 3, \quad log_5 x = -1.$
$x = 5^3, \; x = 5^{-1},$
$x = 125; \qquad x = \frac{1}{5}.$

Жообу: $x_1 = 125; \qquad x_1 = \frac{1}{5}.$

г) Чыгаруу: $x^{\log_3 x-3}=\frac{1}{9}$,

$x^{\log_3 x-3}=\log_3\frac{1}{9}$,

$(\log_3 x-3)\log_3 x=-2$,

$\log^2{}_3 x-3\log_3 x+2=0$, $\log_3 x=t$

$t^2-3t+2=0$, $D=9-8=1$,

$t_{1/2}=\frac{3\pm1}{2}$, $t_1=2$; $t_2=1$.

Демек; $\log_3 x=2$, $\log_3 x=1$

$x=3^2$, $x=3$

$x=9$;

Жообу: $x_1=9$; $x_1=3$.

57. *Чыгаруу: а)* $\begin{cases} x-y=3, \\ \lg x-\lg y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3+y, \\ \lg\frac{x}{y}=\lg 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3+y, \\ \frac{x}{y}=10; \end{cases}$

$\frac{3+y}{y}=10$, $3=9y$, $y=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;

Демек; $x=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$, *Жообу:* $x=\frac{10}{3}$, $y=\frac{1}{3}$.

Чыгаруу: б) $\begin{cases} x+y=36, \\ \log_3 x-\log_3 y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=36-y, \\ \log_3\frac{x}{y}=\log_3 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=36-y, \\ \frac{x}{y}=3; \end{cases}$

$\frac{36-y}{y}=3$, $4y=36$, $y=9$;

Демек; $x=36-9=27$, *Жообу:* $x=27$, $y=9$.

Чыгаруу: в)

$\begin{cases} \log_4(x+y)=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_4(x+y)=\log_4 16 \\ \log_3(x\cdot y)=\log_3 9+\log_3 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=16 \\ \log_3(x\cdot y)=\log_3 63, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=16 \\ x\cdot y=63 \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын ордуна коюу менен чыгарабыз.*

$x=16-y$, $y(16-y)=63$, $16y-y^2=63$,

$y^2-16y+63=0$, $D=256-4\cdot 63=256-252=4$

$y_{1/2}=\frac{16\pm\sqrt{4}}{2}$; $y_1=\frac{16\pm2}{2}=9$; $y_2=\frac{16-2}{2}=7$.

$x_1=16-9=7$; $x_2=16-7=9$;

Жообу: $(7;9)$; $(9;7)$

Чыгаруу: г) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x = y + 1, \end{cases}$ $2^{y+1} + 2^y = 12,$

$2 \cdot 2^y + 2^y = 12,\ 3 \cdot 2^y = 12,\ 2^y = 4,\ 2^y = 2^2,\ y = 2.$

Демек, $x = 2 + 1 = 3.$

Жообу: $(3; 2)$.

Чыгаруу: д) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^2 \cdot 3 \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2,\ y = 1 \\ y = 1;\ x = 2 \end{cases}$

Жообу: $(2; 1)$ *Бирдей негиздеги даражалардын барабар болуу касиети пайдаланалды.*

Чыгаруу: е) $\begin{cases} log_3(2x + y^2) = 1, \\ 2^{x+y^2} - 4 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} log_3(2x + y^2) = log_3 3 \\ 2^{x+y^2} = 2^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y^2 = 3 \\ x + y^2 = 2 \end{cases}$$

Системадагы биринчи теңдемеден экинчи теңдемени кемитебиз: $\dfrac{-\begin{matrix} 2x+y^2=3 \\ x+y^2=2 \end{matrix}}{x+0=1}$ *Демек,* $x = 1$ *x тин маанисин экинчи теңдемеге коёбуз:* $1 + y^2 = 2$

$y^2 = 2 - 1,\ y^2 = 1$

$y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Жообу: $(1; 1);\ (1; -1)$.

58. *Чыгаруу: а)* $lg(2x - 3) > lg(x + 1);$

$lg(2x - 3)$ жана $lg(x + 1)$ *туюнтмалары* $2x - 3 > 0,$ $x + 1 > 0$ *болгондо гана мааниге ээ болот.*

негизи 10 болгон логарифмалык функция өсүүчү болот. Ошондуктан берилген барабарсыздык

$$lg\frac{2x-3}{x+1} > 0, \quad lg\frac{2x-3}{x+1} > lg1, \quad \frac{2x-3}{x+1} > 1$$

Барабарсыздыктарына тең күчтүү, башкача айтканда

$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ \frac{2x-3}{x+1} > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > 3 \\ x > -1 \\ 2x - 3 > x + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > -1 \\ 2x - x > 1 + 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > -1 \\ x > 4, \end{cases}$

Демек, барабарсыздык $x > 4$ *болгондо аткарылат.*

Жообу: $x > 4$.

б) Чыгаруу: $log_{0,5}\, x > log_2(3 - 2x),$ *бирдей негиздеги логарифмага келтирип алабыз.*

$\frac{log_2 x}{log_2 0,5} > log_2(3-2x)$, $\frac{log_2 x}{-1} > log_2(3-2x)$,
$-log_2 x > log_2(3-2x)$, $log_2 x^{-1} > log_2(3-2x)$,
$\frac{1}{x} > 3-2x$, $1 > 3x-2x^2$, $2x^2-3x+1>0$,
$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)>0$; *берилген барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктар системасына тең күчтүү.*

1-учур $\begin{cases} x>0 \\ 3-2x>0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ -2x>-3 \\ x-\frac{1}{2}>0 \\ x-1>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{2} \\ x>\frac{1}{2} \\ x>1, \end{cases}$

Демек, $1<x<\frac{3}{2}$ *болот.*

2-учур $\begin{cases} x>0 \\ 3-2x>0 \\ x-\frac{1}{2}<0 \\ x-1<0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{2} \\ x<\frac{1}{2} \\ x<1, \end{cases}$ *Демек,* $0<x<\frac{1}{2}$.

Жообу: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

в) Чыгаруу: $lg\,x+lg(x-1)<lg\,6$, *логарифмалык функциянын касиети боюнча* $x>1$ *болгондо*
$lg\,x(x-1)<lg\,6$,
барабарсыздык мааниге ээ болот.

Негизи 10 болгон логарифмалык функция өсүүчү. Ошондуктан берилген барабарсыздык
$\begin{cases} x(x-1)<6, \\ x>1, \end{cases}$ *системасына тең күчтүү.*

$\begin{cases} x^2-x-6<0, \\ x>1, \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)(x-3)<0, \\ x>1, \end{cases}$ $\begin{cases} x+2>0 \\ x-3<0, \\ x>1, \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2 \\ x<3, \\ x>1, \end{cases}$

Демек, $1<x<3$ *болот.*

Жообу: $1<x<3$.

г) Чыгаруу: $log_{0,5}(4x-7)<log_{0,5}(x+2)$ *бул барабарсыздыкта логарифманын негизи* $0,5<1$, *ошондуктан берилген барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктар системасына тең күчтүү.*

$$\begin{cases} 4x-7>x+2, \\ 4x-7>0, \\ x+2>0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-x>2+7, \\ 4x>7, \\ x>-2, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>9, \\ x>\frac{7}{4}, \\ x>-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ x>\frac{7}{4}, \\ x>-2, \end{cases}$$

Демек, $x > 3$;

Жообу: $x > 3$.

Көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциянын туундусу.

59. *Чыгаруу: а)* $y = 5 \cdot 3^x, \quad y' = (5 \cdot 3^x)' = 5 \cdot 3^x ln3;$

б) $y = 3^{5x+1}$,

$$y' = (3^{5x+1})' = (5x+1)' \cdot 3^{5x+1} \cdot ln3 = 5 \cdot 3^{5x+1} \cdot ln3;$$

в) $y = 2 \cdot e^x + 3, \quad y' = (2 \cdot e^x + 3)' = 2 \cdot e^x;$

г) $y = e^x \cdot sinx + 2^{3x+5}, \quad y' = (e^x \cdot sinx)' + (2^{3x+5})' =$

$$= (e^x)' \cdot sinx + e^x \cdot (sinx)' + (3x+5)' \cdot 2^{3x+5} \cdot ln2 =$$

$$= e^x \cdot sinx + e^x \cdot cosx + 3 \cdot 2^{3x+5} \cdot ln2;$$

60. *Чыгаруу: а)* $f(x) = 5e^x, \quad F(x) = 5e^x + c;$

б) $f(x) = 3 \cdot 0{,}7^x - 2^{-x}$,

$F(x) = 3 \cdot \frac{0{,}7^x}{ln7} - \frac{2^{-x}}{ln2} = 3 \cdot \frac{0{,}7^x}{ln7} - \frac{1}{2^x ln2} + c;$

в) $f(x) = 2 \cdot e^{3x} - 3^{2+5x}, \quad F(x) = 2 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{2+5x}}{ln3} + c;$

г) $f(x) = 7 \cdot 3^{5-2x} - e^{1+3x}$,

$$F(x) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{3^{5-2x}}{ln3} - \frac{1}{3} e^{1+3x} + c = -\frac{7}{2} \cdot \frac{3^{5-2x}}{ln3} - \frac{1}{3} e^{1+3x} + c.$$

61. *Чыгаруу: а)* $f(x) = e^x, \ x_o = 0;$

$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ *жаныманын теңдемеси.*

$f(0) = e^0 = 1; \qquad f'(x) = (e^x)' = e^x; \qquad f'(0) = e^0 = 1$ *демек жаныманын теңдемеси төмөнкүдөй болот.*

$$y = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Жообу: $y = 1 + x$.

Чыгаруу: б) $f(x) = 2^x, \ x_o = 1$.

$f(1) = 2^1 = 2; \quad f'(x) = (2^x)' = 2^x ln2;$

$f'(1) = 2^1 \cdot ln2 = 2 \cdot ln2,$

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 2xln2 - 2ln2 =$$

$$= 2 - 2ln2 + 2xln2;$$

Жообу: $y = 2 - 2ln2 + 2xln2$.

62. *Чыгаруу:* *а)* $\int_0^1 0,2^x\,dx = \frac{0,2^x}{ln0,2}\Big|_0^1 = \frac{0,2^1}{ln0,2} - \frac{0,2^0}{ln0,2} =$

$$= \frac{0,2}{ln0,2} - \frac{1}{ln0,2} = \frac{0,2-1}{ln0,2} = \frac{-0,8}{ln0,2};$$

б) $\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^{3\cdot1} - \frac{1}{3}e^{3\cdot0} = \frac{e}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e-1}{3};$

в) $\int_{-1}^1 5^x dx = \frac{5^x}{ln5}\Big|_{-1}^1 = \frac{5^1}{ln5} - \frac{5^{-1}}{ln5} = \frac{5}{ln5} - \frac{1}{5ln5} = \frac{25-1}{5ln5} = \frac{24}{5ln5};$

г) $\int_1^2 3^x dx = \frac{3^x}{ln3}\Big|_1^2 = \frac{3^2}{ln3} - \frac{3^1}{ln3} = \frac{9}{ln3} - \frac{3}{ln3} = \frac{6}{ln3}.$

63. *Чыгаруу:* $f(x) = xe^{-x}$,

1.Аныкталуу обласы $D(f) = (-\infty; +\infty)$,

2.Функция жуп да так да эмес.

3-4. Функциянын графиги координата октору менен (0;0) чекитинде кесилишет, анткени

$$f(0) = e^{-0} = 0\cdot 1$$
$$xe^{-x} = 0, \ \ x = 0;$$

5-6. Функциянын туундусун таап, сыналуучу чекиттерин издейбиз.

$$f'(x) = (xe^{-x})' = x'^{e^{-x}} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x),$$

$e^{-x}(1-x) = 0,$

$1 - x = 0.$

$x = 1$ *демек,* $x = 1$ *чекити сыналуучу чекит болот. Бул чекит сан огун эки интервалга бөлөт* $(-\infty; 1)$ жана $[1; +\infty)$.

$(-\infty; 1)$ *интервалынан* $x = -2$ *чекитинде туундунун белгисин аныктайлы.*

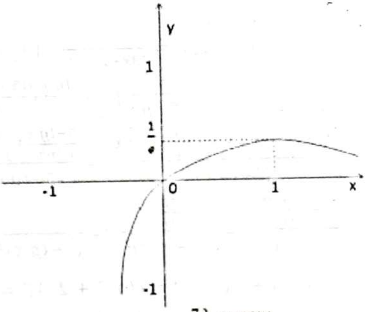
$f'(-2) = e^{-2}(1 - (-2)) = \ = 3e^{-2} > 0.$

Демек, бул аралыкта функция өсүүчү $[1; +\infty)$ *аралыгында* $f'(x) < 0$, *демек бул аралыкта функция кемүүчү.* $x = 1$ *чекити максимум чекит болот.*

$f(1)_{max} = 1\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$

болот.

Жообу: $(-\infty; 1]$ *өсөт,*



73-сүрөт

$[1;+\infty)$ *кемийт.*

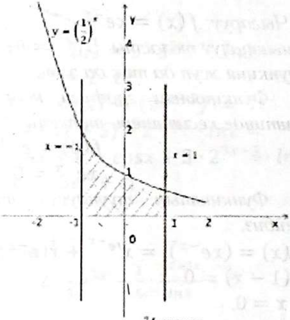
$x_{max} = 1$, $f(1) = \frac{1}{e}$.

64. *Чыгаруу: Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын табабыз.*

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 1.$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *функциясынын графигин чийип алабыз.*

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



74-сүрөт

Чиймедеги ийри сызыктуу трапециянын аянтын табабыз.

$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{ln\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^{1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{ln\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{ln\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2ln\frac{1}{2}} - \frac{2}{ln\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2ln\frac{1}{2}}$.

Жообу: $S = -\frac{3}{2ln\frac{1}{2}}$.

65. *Чыгаруу: а)* $y = log_5 x$, $y' = (log_5 x)' = \frac{1}{x \cdot ln5}$;

б) $y = lg(3x+1)$,

$y' = (lg(3x+1))' = \frac{1}{(3x+1)\cdot ln10} \cdot (3x+1)' = \frac{3}{(3x+1)\cdot ln10}$.

в) $y = \frac{lg\,x}{5-lg\,x}$, $y' = \left(\frac{lg\,x}{5-lg\,x}\right)' = \frac{(lg\,x)'(5-lg\,x)-(5-lg\,x)'\,lg\,x}{(5-lg\,x)^2} =$

$= \frac{\frac{1}{x\cdot ln10}(5-lg\,x)+\frac{1}{x\cdot ln10}lg\,x}{(5-lg\,x)^2} = \frac{\frac{5-lg\,x}{x\cdot ln10}+\frac{lg\,x}{x\cdot ln10}}{(5-lg\,x)^2} =$

$= \frac{\frac{5-lg\,x+lg\,x}{x\cdot ln10}}{(5-lg\,x)^2} = \frac{\frac{5}{x\cdot ln10}}{(5-lg\,x)^2} = \frac{5}{(5-lg\,x)^2\cdot x\cdot ln10}$.

г) $y = ln(5+2x)$, $y' = (ln(5+2x))' = \frac{1}{5+2x}\cdot(5+2x)' = \frac{2}{5+2x}$.

д) $y = x^5\,ln\,x$; $y' = (x^5\,ln\,x)' = (x^5)'\,ln\,x + x^5(ln\,x)' =$

$= 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 \cdot \ln x + x^4 = x^4(5 \cdot \ln x + 1);$

е) $y = \ln \sqrt[5]{(x^3-1)^3}$ *туунду алынуучу туюнтманы адегенде логарифмалап алабыз.*

$$\ln \sqrt[5]{(x^3-1)^3} = \ln(x^3-1)^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\ln(x^3-1)$$

демек, $y = \frac{3}{5}\ln(x^3-1)$, $y' = \left(\frac{3}{5}\ln(x^3-1)\right)' =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^3-1} \cdot (x^3-1)' = \frac{3}{5(x^3-1)} \cdot 3x^2 \quad = \frac{9x^2}{5(x^3-1)};$

66. Чыгаруу: а) $f(x) = \ln \sqrt[5]{\frac{3-x}{3+x}}$; *логарифмалап алабыз.*

$$\ln \sqrt[5]{\frac{3-x}{3+x}} = \ln \frac{(3-x)^{\frac{1}{5}}}{(3+x)^{\frac{1}{5}}} = \ln(3-x)^{\frac{1}{5}} - \ln(3+x)^{\frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(3-x) - \frac{1}{5}\ln(3+x);$$

Демек, $f'(x) = \left(\frac{1}{5}\ln(3-x) - \frac{1}{5}\ln(3+x)\right)' =$

$= \frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3-x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3+x} = -\frac{1}{5(3-x)} - \frac{1}{5(3+x)} = \frac{-3-x-3+x}{5(9-x^2)} = \frac{-6}{5(9-x^2)};$

б) $f(x) = x^3 \cdot \log_3 x$; $\quad f'(x) = (x^3 \cdot \log_3 x)' = (x^3)' \cdot \log_3 x +$
$+ x^3 \cdot (\log_3 x)' = 3x^2 \log_3 x + x^3 \cdot \frac{1}{x\ln 3} = 3x^2 \log_3 x + \frac{x^2}{\ln 3} =$

$$= x^2\left(3\log_3 x + \frac{1}{\ln 3}\right);$$

в) $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$;

$$f'(x) = \left(\frac{2\ln x}{x}\right)' = \frac{x \cdot (2\ln x)' - x' \cdot 2\ln x}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{2}{x} - 2\ln x}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2};$$

г) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$; $f'(x) = \left(\frac{x^2}{\ln x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot \ln x - x^2 \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x};$$

д) $f(x) = \frac{\ln(3+2x)}{x^2-1}$; $f'(x) = \left(\frac{\ln(3+2x)}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2-1)(\ln(3+2x))' - (x^2-1)'\ln(3+2x)}{(x^2-1)^2} =$

$$= \frac{(x^2-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{3+2x} - 2x \cdot \ln(3+2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{2(x^2-1)}{3+2x} - 2x \cdot \ln(3+2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{2(x^2-1) - 2x \cdot (3+2x) \cdot \ln(3+2x)}{3+2x}}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot (3+2x) \cdot \ln(3+2x)}{(3+2x)(x^2-1)^2}.$$

е) $f(x) = \frac{\log_5 x^3}{x+1}$, $f'(x) = \left(\frac{\log_5 x^3}{x+1}\right)' = \left(\frac{3\log_5 x}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)(3\log_5 x)' - (x+1)' 3\log_5 x}{(x+1)^2} =$

$$=\frac{(x+1)\cdot\frac{3}{xln5}-3log_5 x}{(x+1)^2}=\frac{\frac{3(x+1)-3x\cdot ln5\cdot log_5 x}{xln5}}{(x+1)^2}=\frac{3(x+1)-3x\cdot ln5\cdot log_5 x}{x(x+1)^2 ln5}.$$

67. Чыгаруу: Бул функциялардын баштапкы функциясын табууда логарифмалык функциялардын туунду алуу формулаларын колдонобуз. б.а.

$$(lnx)'=\frac{1}{x};\quad (log_a x)'=\frac{1}{xlna};$$

а) $f(x)=\frac{5}{3x+1}$, $\quad F(x)=\frac{1}{3}\cdot 5\cdot ln(3x+1)=\frac{5}{3}ln(3x+1);$

б) $f(x)=\frac{1}{x+7}$, $\quad F(x)=ln(x+7);$

в) $f(x)=\frac{7}{5x\,ln\,3}$, $\quad F(x)=\frac{7}{5}\cdot log_3 x;$

г) $f(x)=\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x}$,

$$F(x)=3\cdot ln(x+3)-lnx=ln(x+3)^3-lnx=ln\frac{(x+3)^3}{x};$$

68. Чыгаруу: $f(x)=log_2(x-1)$, $x_o=2$. *Жаныманын теңдемеси* $y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$ *болот.*

$f(2)=log_2(2-1)=log_2 1=0.$

$f'(x)=(log_2(x-1))'=\frac{1}{(x-1)ln2}$,

$f'(2)=\frac{1}{(2-1)ln2}=\frac{1}{ln2}$. *Демек,* $y=0+\frac{1}{ln2}(x-2)=\frac{x}{ln2}-\frac{2}{ln2}$

Жообу: $\quad y=\frac{x}{ln2}-\frac{2}{ln2}.$

69. Чыгаруу: а) $\int_2^5\frac{3dx}{x}=3lnx|_2^5=3ln5-3ln2=$

$$=ln5^3-ln2^3=ln\frac{125}{8};$$

б) $\int_0^2\frac{dx}{4x+3}=\frac{1}{4}ln(4x+3)\,|_0^2=\frac{1}{4}ln(4\cdot 2+3)-\frac{1}{4}ln(4\cdot 0+3)=$

$=\frac{1}{4}ln\,11-\frac{1}{4}ln\,3=ln\,11^{\frac{1}{4}}-ln\,3^{\frac{1}{4}}=ln\frac{11^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}=ln\sqrt[4]{\frac{11}{3}}.$

в) $\int_2^e\frac{dx}{x+1}=ln(x+1)\,|_2^e=ln(e+1)-ln(2+1)=ln\frac{e+1}{3};$

г) $\int_{-1}^1\frac{dx}{5-3x}=-\frac{1}{3}ln(5-3x)\,|_{-1}^1=-\frac{1}{3}ln(5-3\cdot 1)+\frac{1}{3}ln(5-3\cdot(-1))=$

$=-\frac{1}{3}ln2+\frac{1}{3}ln8=-ln2^{\frac{1}{3}}+ln8^{\frac{1}{3}}=ln\frac{8^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=ln4^{\frac{1}{3}}=ln\sqrt[3]{4}.$

70, $f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$,

Чыгаруу: 1. Аныкталуу областы $D(f)=(0;+\infty);$

2. *Функция жуп да так да эмес;*

3.-4. $x = 0$ *болгондо функция мааниге ээ болбойт жана* $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ *теңдемесинин тамырлары жок. Ошондуктан функциянын графиги координаталык октор менен кесилишпейт.*

5.-6. *Функциянын туундусун таап, сыналуучу чекиттерди табабыз.*

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x})' \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x}{x} =$$

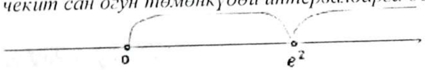
$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, *эми сыналуучу чекиттерди табабыз*

$\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = 0,$

$2 - \ln x = 0, \quad 2x\sqrt{x} \neq 0.$

$\ln x = 2,$

$x = e^2$; *Демек, сыналуучу чекит* $x = e^2$ *чекити болот. Бул чекит сан огун төмөнкүдөй интервалдарга бөлөт.*

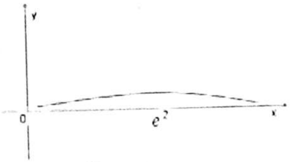


$(0; e^2)$; $(e^2; +\infty)$.

$(0; e^2)$ *аралыгынан* $x = e$ *чекитиндеги туундунун белгисин аныктайлы.*

$f'(e) = \frac{2-\ln e}{2e\sqrt{e}} = \frac{2-1}{2e\sqrt{e}} = \frac{1}{2e\sqrt{e}} > 0$

демек, бул аралыкта функция өсөт;



75-сүрөт

$(e^2; +\infty)$ *аралыгынан* $x = e^3$ *чекитиндеги туундунун белгисин аныктайлы*

$f'(e^3) = \frac{2-\ln e^3}{2e^3\sqrt{e^3}} = \frac{2-3\ln e}{2e^4\sqrt{e}} = \frac{2-3}{2e^4\sqrt{e}} = \frac{-1}{2e^4\sqrt{e}} < 0$ *демек, бул аралыкта функция кемийт.* $x = e^2$ *максимум чекит,* $f(e^2) = \frac{2}{e}$;

Жообу: $x_{max} = e^2$, $f(e^2) = \frac{2}{e}$;

$(0; e^2)$ *аралыгында өсүүчү,*

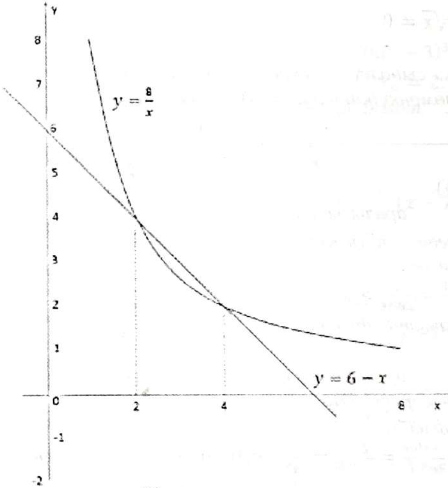
$(e^2; +\infty)$ *аралыгында кемүүчү.*

71. Чыгаруу: $y = \frac{8}{x}$ *жана* $y = 6 - x$ *функцияларынын графиктерин тургузабыз.*

x	1	2	4	8	$y = \frac{8}{x}$ *функциясы үчүн*
y	8	4	2	1	

x	0	4	$y = 6 - x$ *функциясы үчүн*
y	6	2	

ABCD тик бурчтуу трапециянын аянтынан ABCD ийри сызыктуу трапециясынын аянтын кемитсек, изделүүчү фигуранын аянты табылат.



76-сүрөт

$$S = \int_2^4 (6-x)\,dx - \int_2^4 \left(\frac{8}{x}\right) dx = \left(6x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_2^4 - 8lnx\Big|_2^4 =$$

$$= 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \left(6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2\right) - (8ln4 - 8ln2) =$$

$$= 24 - 8 - 12 + 2 - 16ln2 + 8ln2 = 6 - 8ln2;$$

Жообу: $S = 6 - 8ln2.$

72. *Чыгаруу:* *а)* $25^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(27-2)} = \sqrt[3]{27\left(1-\frac{2}{27}\right)} =$

$= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{27}} \approx 3 \cdot \left(1-\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{27}\right) \approx 3 \cdot \left(1-\frac{2}{81}\right) \approx$

$\approx 3 \cdot (1-0{,}024) \approx 3 \cdot 0{,}98 \approx 2{,}93;$

б) $\sqrt[3]{60} = \sqrt[3]{64-4} = \sqrt[3]{64\left(1-\frac{4}{64}\right)} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{1}{16}} \approx$

$\approx 4 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}\right) \approx 4 \cdot \left(1-\frac{2}{48}\right) \approx 4 \cdot (1-0{,}02) \approx 4 \cdot 0{,}98 \approx 3{,}92;$

в) $\sqrt[5]{32{,}3} = \sqrt[5]{(32+0{,}3)} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{0{,}3}{32}\right)} =$

$\approx 2 \cdot (1+0{,}009)^{\frac{1}{5}} \approx 2 \cdot \left(1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}009\right) \approx 2 \cdot (1+0{,}0018) \approx$

$\approx 2 \cdot 1{,}0018 \approx 2{,}0036;$

г) $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{(64+1)} = \sqrt[6]{64\left(1+\frac{1}{64}\right)} =$

$\approx 2 \cdot (1+0{,}015)^{\frac{1}{6}} \approx 2 \cdot \left(1+\frac{1}{6}\cdot 0{,}015\right) \approx$

$\approx 2 \cdot 1{,}0025 \approx 2{,}005;$

д) $\sqrt[4]{16{,}3} = \sqrt[4]{(16+0{,}3)} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{0{,}3}{16}\right)} =$

$\approx 2 \cdot (1+0{,}018)^{\frac{1}{4}} \approx 2 \cdot \left(1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}018\right) \approx$

$\approx 2 \cdot 1{,}0045 \approx 2{,}009;$

е) $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(125+3)} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{3}{125}\right)} =$

$\approx 5 \cdot (1+0{,}024)^{\frac{1}{3}} \approx 5 \cdot \left(1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}024\right) \approx$

$\approx 5 \cdot 1{,}008 \approx 5{,}04;$

ж) $\frac{1}{1{,}005^{30}} = 1{,}005^{-30} = (1+0{,}005)^{-30} \approx 1 + (-30) \cdot 0{,}005 \approx$

$\approx 1 - 0{,}15 = 0{,}85;$

з) $\frac{1}{2{,}024^3} = 2{,}024^{-3} = (2+0{,}024)^3 = 2^{-3}\left(1+\frac{0{,}024}{2}\right)^{-3} \approx$

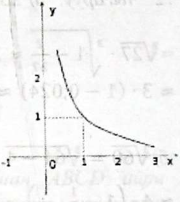
$\approx \frac{1}{8}\left(1+\frac{(-3)\cdot 0{,}024}{2}\right) \approx \frac{1}{8}(1-0{,}036) \approx \frac{1}{8}\cdot 0{,}964 \approx 0{,}12$

73. *Чыгаруу: а)* $f(x)=x^{-\frac{3}{2}},\ \ f(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

бул функция $(0;+\infty)$ *аралыгында аныкталган кемүүчү функция, даражалуу функциянын касиеттери боюнча анын графиги (1;1) чекити аркылуу өтөт. Берилген функциянын графиги 77 - сүрөттөгүдөй болот.*

Эми туундусун табабыз:

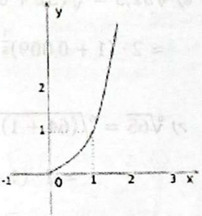
$$f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}.$$



77-сүрөт

Чыгаруу: б) $f(x)=x^{\pi}$ *бул функциянын даража көрсөткүчү* $\pi>1$, *ошондуктан бул функция* $[0;+\infty)$ *аралыгында өсүүчү. Анын графиги 78-сүрөттө көрсөтүлгөндөй болот.*

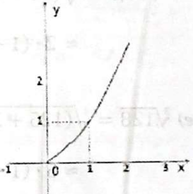
$$f'(x)=(x^{\pi})'=\pi\cdot x^{\pi-1}.$$



78-сүрөт

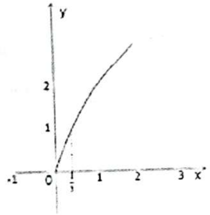
Чыгаруу: в) $f(x)=x^{\sqrt{3}}$ *бул функциянын даража көрсөткүчү* $\sqrt{3}>1$, *ошондуктан бул функция* $[0;+\infty)$ *аралыгында өсүүчү, анын графиги 79-сүрөттө көрсөтүлгөн. Берилген функциянын туундусун табабыз.*

$$f'(x)=\left(x^{\sqrt{3}}\right)'=\sqrt{3}\cdot x^{\sqrt{3}-1}.$$



79-сүрөт

Чыгаруу: *г)* $f(x) = (3x)^{ln2}$ *бул функциянын даража көрсөткүчү* $0 < ln2 < 1$. *Анын графиги төмөндөгүдөй болот (80-сүрөт). График* $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ *чекити аркылуу өтөт. Эми функциянын туундусун табабыз.*



80-сүрөт

$$f'(x) = \left((3x)^{ln2}\right)' = (3x)' \cdot ln2 \cdot (3x)^{ln2-1} = 3 \cdot ln2 \cdot (3x)^{-1+ln2}.$$

74. *Функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла.*

Чыгаруу: а) $f(x) = -\frac{1}{5}x^{-\sqrt{3}}$;

$$F(x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}+1}}{-\sqrt{3}+1} + c = \frac{x^{-\sqrt{x}+1}}{5(1-\sqrt{3})} + c \quad ;$$

б) $f(x) = 7 \cdot x^{-2}$; $F(x) = 7 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{7}{x} + c$;

в) $f(x) = x^{3\sqrt{2}}$; $F(x) = \frac{x^{3\sqrt{2}+1}}{3\sqrt{2}+1} + c$;

г) $f(x) = x^e$; $F(x) = \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$;

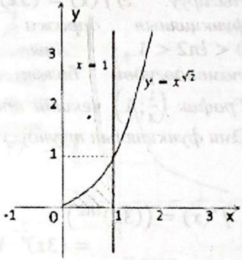
75. *Чыгаруу: а)* $\int_1^4 \frac{2dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int_1^4 2x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 =$

$= 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 4 \cdot x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot 1^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 2 - 4 = 4;$

б) $\int_1^{16} 3x^{\frac{1}{4}}\, dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}\Big|_1^{16} = 3 \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\Big|_1^{16} = 12 \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}}}{5}\Big|_1^{16} =$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt[4]{16^5}}{5} - 12 \cdot \frac{1^{\frac{5}{4}}}{5} = 12 \cdot \frac{32}{5} - 12 \cdot \frac{1}{5} = 12 \cdot \frac{31}{5}.$$

76. Чыгаруу: а) $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $x = 1$; *График сызабыз, сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын табабыз.*

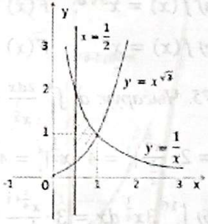


81-сурот

$$S = \int_0^1 x^{\sqrt{2}}dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\Big|_0^1$$
$$= \frac{1^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} - \frac{0^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1};$$

Жообу: $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ *кв. бирдик.*

Чыгаруу: б) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$ *функцияларынын графиктерин чийип, графиктер менен чектелген фигуранын аянтын табабыз. Изделүүчү фигуранын аянты, ACDE ийри сызыктуу трапециясынын аянтынан, ABDE ийри сызыктуу трапециянын аянтын кемиткенге барабар.*



82-сурот

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{\sqrt{3}}dx = lnx\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$
$$= ln1 - ln\frac{1}{2} - \left(\frac{1^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}\right) = 0 - ln\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2^{\sqrt{3}+1}(\sqrt{3}+1)};$$

Жообу: $S = \frac{1}{\sqrt{3}+1}\left(\frac{1}{2^{\sqrt{3}+1}} - 1\right) - ln\frac{1}{2}$ *кв. бирдик.*

77. *Чыгаруу:* а) $y(t) = 5\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$, $y'' = -16y$;

$y(t)$ *функциясынын 2-тартиптеги туундусун табабыз.*

$$y'(t) = \left(5\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -4 \cdot 5\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y''(t) = \left(-4 \cdot 5\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -16 \cdot 5\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Демек, $y'' = -16y$ *болот.*

Жообу: $y(t)$ функциясы $y'' = -16y$ *теңдемесинин чыгарылышы болот.*

б) *Чыгаруу:* $y(t) = 2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$, $y'' + \frac{1}{9}y = 0$.

$$y'(t) = \left(2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \frac{1}{3} \cdot 2\cos\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$y''(t) = \left(\frac{1}{3} \cdot 2\cos\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{6}\right);$$

Демек, $y'' = -\frac{1}{9}y$ *болот.*

Жообу: $y(t)$ функциясы *берилген дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болот.*

78. *Чыгаруу:* а) $y' = -3\cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$;

$-3\cos x$ *функциясынын баштапкы функциясын табабыз.*

$y = -3\sin x + c$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\frac{\pi}{2} + c = -3$, $-3 \cdot 1 + c = -3$, $c = -3 + 3 = 0$;	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$ *шартын пайдаланып, с нын маанисин табабыз.*

Демек, $y = -3\sin x$.

Жообу: $y = 3\sin x$.

б) *Чыгаруу:* $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$.

$$y = x^3 + 2x^2 - x + c,$$
$$y(1) = x^3 + 2x^2 - x + c = -2,$$
$$2 + c = -2,$$
$$c = -4;$$

Демек, $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$,

Жообу: $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$.

79. а) *Чыгаруу:* $y = 3e^{-2x}$, $y' = -2y$.

$y = 3e^{-2x}$ *функциясынын туундусун табабыз.*

$$y' = (3e^{-2x})' = (-2x) \cdot 3e^{-2x} = -2 \cdot 3 \cdot e^{-2x} = -2y$$
$$y' = -2y$$
Жообу: $y = 3e^{-2x}$ *функциясы* $y' = -2y$ *теңдемесинин чыгарылышы болот.*

б) Чыгаруу: $y = 10e^{6x}$, $y' = 6y$;
$$y' = (10e^{6x})' = (6x) \cdot 10e^{6x} = 6 \cdot 10e^{x}$$
Демек, $$y' = 6y$$
Жообу: $y = 10e^{6x}$ *функциясы* $y' = 6y$ *теңдемесинин чыгарылышы болот.*

80. а) Чыгаруу: $x = 5cos(3t-1)$; *Гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемесин табуу үчүн* $x = 5cos(3t-1)$ *функциясынын 2-тартиптеги туундусун табабыз:*
$$x' = 5(-sin(3t-1) \cdot (3t)') = -3 \cdot 5sin(3t-1)$$
$$x'' = \left(-3 \cdot 5sin(3t-1)\right)' = -9 \cdot 5cos(3t-1);$$
Демек, $x'' = -9x$.

Жообу: $x'' = -9x$.

б) $x = 2sin(0{,}5t-7)$ *функциясынын 2-тартиптеги туундусун табабыз.*
$$x' = \left(2sin(0{,}5t-7)\right)' = 0{,}5 \cdot 2cos(0{,}5t-7),$$
$$x'' = \left(0{,}5 \cdot 2cos(0{,}5t-7)\right)' = -0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2sin(0{,}5t-7),$$
Демек, $$x'' = -0{,}25x$$
Жообу: $x'' = -0{,}25x$.

Иррационалдык теңдемелер.

81. Чыгаруу: а) $\sqrt{x-5} = 2$, *арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча* $\sqrt{x-5} \geq 0$ *жана* $x-5 \geq 0$, *демек теңдеменин сол жана оң жактары барабар. Эми теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*
$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2,$$
$$x-5 = 4,$$
$$x = 9.$$
Жообу: $x = 9$.

б) Чыгаруу: $\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x} = -5$, *бул теңдеменин сол жагы* $\sqrt{x-3} \geq 0$, $x-5 \geq 0$, $\sqrt[4]{x} \geq 0$ *жана* $x \geq 0$ *б.а. оң болот. оң жагы* $-5 < 0$ *терс, б.а. оң жана сол жактары барабар эмес.*

Арияметикалык тамырдын аныктамасы боюнча теңдеме тамырга ээ болбойт.

Жообу: $\emptyset$.

82. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{2-x} = x - 2$.

Чыгаруу: Теңдеменин аныкталуу областы $\sqrt{x-2} \geq 0$, $\sqrt{2-x} \geq 0$ *барабарсыздыктарын канааттандырган сандар болот.*

б.а. $x - 2 \geq 0$, $x \geq 2$ *Жообу:* $x = 2$.	$2 - x \geq 0$, $-x \geq -2$ $x \leq 2$	*Демек, теңдеменин аныкталуу областы* *x≥2 жана* $x \leq 2$, *мындан теңдеменин тамыры x=2 экендиги келип чыгат.*

б) Чыгаруу: $\sqrt[4]{1-x^3} - \sqrt{x-1} = x^2 + x - 2$, *теңдеменин аныкталуу областы* $1 - x^3 \geq 0$, $x - 1 \geq 0$ *жана* $x^2 + x - 2 \geq 0$ *барабарсыздыктарын канааттандырган сандар болот.*

б.а. $1 - x^3 \geq 0$, $-x^3 \geq -1$, $x^3 \leq 1$, $x \leq 1$;	$x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$;	$x^2 + x - 2 \geq 0$, $(x-1)(x+2) \geq 0$, $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -2, \end{cases} x \geq 1$

Демек, теңдеменин аныкталуу областы $x \leq 1$ *жана* $x \geq 1$, *мындан тамыры* $x = 1$ *экендиги келип чыгат.*

Жообу: $x = 1$.

83. Чыгаруу: а) $3 + 2\sqrt{x-4} = x$, *радикалды жалгыздап алабыз:* $2\sqrt{x-4} = x - 3$, *эми теңдеменин эки жагын тең*

$$\left(2\sqrt{x-4}\right)^2 = (x-3)^2$$ *квадратка көтөрөбүз.*

Берилген *теңдеме* $\begin{cases} 4(x-4) = x^2 - 6x + 9 \\ x - 3 \geq 0, \end{cases}$ *системасына тең күчтүү.*

Натыйжада $4x - 15 = x^2 - 6x + 9$,

$x^2 - 10x + 25 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*

$D = 100 - 4 \cdot 25 = 0$

Демек, $x = \frac{10}{2} = 5$ *бул тамыр теңдемени канааттандырат.*
Жообу: , $x = 5$.

б) *Чыгаруу:* $\sqrt[3]{x^3 - 5x - 4} + 1 = x$, *АО:* $x \in R$.
$\sqrt[3]{x^3 - 5x - 4} = x - 1$ *теңдеменин эки жагын тең кубка*
$\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x - 4}\right)^3 = (x - 1)^3$ *көтөрөбүз.*
$x^3 - 5x - 4 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$
$3x^2 - 8x - 3 = 0,\quad D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 64 + 36 = 100$
$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}$, $x_1 = \frac{8+10}{6} = 3$, $x_2 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$ *эки тамыр тең теңдемени канааттандырат.*

Жообу: $x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{1}{3}$.

84. *Чыгаруу: а)* $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 4} = 1$, *АО:* $x \le 4,\ x \ge \frac{5}{3}$.
Теңдеменин сол жагына бир радикалды калтырып, экинчисин оң жагына алып өтөбүз.
$\sqrt{3x - 5} = 1 + \sqrt{x - 4},$
$\left(\sqrt{3x - 5}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x - 4}\right)^2,$
$3x - 5 = 1 + 2\sqrt{x - 4} + 4 - x,$
$4x - 10 = 2\sqrt{x - 4},$
$(2x - 5)^2 = \left(\sqrt{x - 4}\right)^2,$
$4x^2 - 20x + 25 = 4 - x,$
$4x^2 - 19x + 25 = 0,\quad D = 361 - 336 = 25$
$x_{1/2} = \frac{19 \pm 3}{8}$, $x_1 = \frac{19+5}{8} = 3$, $x_2 = \frac{19-5}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$
табылган эки тамыр тең чыгарылыш болот.

Жообу: $x_1 = 3,\ x_2 = \frac{7}{4}$.

б) *Чыгаруу:* $\frac{3}{x - \sqrt{x^2-3}} - \frac{3}{x + \sqrt{x^2-3}} = 2$ *теңдеменин сол жагын жалпы бөлүмгө келтиребиз.*

$$\frac{3\left(x + \sqrt{x^2-3}\right) - 3\left(x - \sqrt{x^2-3}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2-3}\right)\left(x + \sqrt{x^2-3}\right)} = 2,$$

$$\frac{3x + 3\sqrt{x^2-3} - 3x + 3 \cdot \sqrt{x^2-3}}{x^2 - (x^2-3)} = 2,$$

$\frac{6\sqrt{x^2-3}}{3} = 2,\quad 2\sqrt{x^2 - 3} = 2,\quad \sqrt{x^2 - 3} = 1,\quad \left(\sqrt{x^2 - 3}\right)^2 = 1^2,$

$x^2 - 3 = 1,\ \ x^2 = 4,\ \ x_1 = 2,\ \ x_2 = -2$. *Эки тамыр тең теңдемени канааттандырат.*

Жообу: , $x_1 = 2,\ \ x_2 = -2$.

85. *Чыгаруу: а)* $\sqrt[3]{6+x} + \sqrt[3]{3-x} = 3$

$\sqrt[3]{6+x} = u,\ \sqrt[3]{3-x} = \vartheta$ *жаңы белгисиздерди кийиребиз. Мындан* $u^3 = 6 + x$ *жана* $\vartheta^3 = 3 - x$ *экендигин таап алабыз.* u *жана* ϑ *белгисиздерине карата төмөндөгүдөй теңдемелер системасын алабыз.*

$$\begin{cases} u + \vartheta = 3, \\ u^3 + \vartheta^3 = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 3 - \vartheta, \\ (3-\vartheta)^3 + \vartheta^3 = 9, \end{cases}$$

$27 - 27\vartheta + 9\vartheta^2 - \vartheta^3 + \vartheta^3 = 9.$

$9\vartheta^2 - 27\vartheta + 18 = 0,$

$\vartheta^2 - 3\vartheta + 2 = 0,\quad D = 9 - 8 = 1,$

$\vartheta_{1/2} = \frac{3\pm1}{2},\ \ \vartheta_1 = \frac{3+1}{2} = 2,\ \ \vartheta_2 = \frac{3-1}{2} = 1;$

$$u_1 = 3 - 2 = 1,\quad u_2 = 3 - 1 = 2,$$

$\left(\sqrt[3]{6+x}\right)^3 = 1^3$	$\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3 = 2^3$	$\left(\sqrt[3]{6+x}\right)^3 = 2^3$	$\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3 = 1^3$
$6 + x = 1$	$3 - x = 8$	$6 + x = 8$	$3 - x = 1$
$x = -5$	$x = -5$	$x = 2$	$x = 2$

Жообу: $x_1 = 2,\ x_2 = -5.$

б) Чыгаруу: $\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[3]{x-1} = 1$ *бир радикалды теңдеменин оң жагына өткөрүп алабыз, анын эки жагын тең кубка көтөрөбүз.*

$\sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{x-1} + 1,$

$\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x-1} + 1\right)^3,$

$x + 6 = 1 + 3\sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{(x-1)^2} + x - 1,$

$3\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{x-1} - 6 = 0,$

$\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} - 2 = 0,$

$\sqrt[3]{x-1} = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз,*

$t^2 + t - 2 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*

$t_1 = 1,\ t_2 = -2,$

Демек, $\sqrt[3]{x-1} = 1,$	$\sqrt[3]{x-1} = -2,$
$x - 1 = 1,$	$x - 1 = -8,$
$x = 2.$	$x = -7.$

Жообу: $x_1 = 2,\ x_2 = -7.$

86. *а) Чыгаруу:* $\sqrt[10]{5-x} = \sqrt[10]{x^2+x+2}$; *АО:* $x \in (-\infty; 5)$.

Теңдеменин эки жагын тең 10-даражага көтөрбүз.

$$\left(\sqrt[10]{5-x}\right)^{10} = \left(\sqrt[10]{x^2+x+2}\right)^{10}$$

$5 - x = x^2 + x + 2,$

$x^2 + 2x - 3 = 0,\ D = 4 - 4\cdot(-3) = 16,$

$x_{1/2} = \frac{-2\pm4}{2},\ \ x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1,\ \ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$ *'бул эки тамыр тең аныкталуу областка тиешелүү.*

Жообу: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$.

б) Чыгаруу: $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$

Теңдеменин АО: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 5),\ \ x \neq -3,\ \ x \neq 5.$

$\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = t$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.*

$\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = \frac{1}{t}.$

Берилген иррационалдык теңдеме

$t + \frac{1}{t} = 2$ *рационалдык теңдемеге айланат.*

$t^2 + 1 = 2t,$

$t^2 - 2t + 1 = 0,\ D = 4 - 4 = 0,$

Демек, $t = \frac{2}{2} = 1$ *болот.*

$\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1,\quad \frac{5-x}{x+3} = 1,$

$5 - x = x + 3,$

$-x - x = 3 - 5,$

$-2x = -2,$

$x = 1$ *бул тамыр АО го тиешелүү.*

Жообу: $x = 1.$

87. *а) Чыгаруу:* $\sqrt[10]{3-x} = \sqrt[5]{x-1};$ *АО:* $x \in (-\infty; 3).$

Бул теңдемеде 5- жана 10-даражадагы радикалдар бар. Теңдемени иррационалдуулуктан куткаруу үчүн, анын эки жагын тең 5 менен 10 дун эң кичине бөлүнүүчүсүнө б.а. 10 – даражага көтөрбүз.

$$\left(\sqrt[10]{3-x}\right)^{10} = \left(\sqrt[5]{x-1}\right)^{10}$$

$$3 - x = (x-1)^2$$

$$3 - x = x^2 - 2x + 1$$

$x^2 - x - 2 = 0,\ D = 1 + 8 = 9,$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$, $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$ *бул эки тамыр тең аныкталуу областка тиешелүү.*

Жообу: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

б) Чыгаруу: $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt{x-1}$; *АО:* $x \geq 1$, б. а. $[1; +\infty)$.

Теңдеменин эки жагын тең 6-даражага көтөрөбүз:

$\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^6 = \left(\sqrt{x-1}\right)^6$,

$(x+3)^2 = (x-1)^3$.

$x^2 + 6x + 9 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$,

$x^3 - 2x^2 - 3x - 10 = 0$. *Виеттин теоремасы боюнча бул кубдук теңдеменин тамырларын анын бош мүчөсү -10дун бөлүүчүлөрүнүн арасынан издейбиз. Текшерип көрүп, анын бир тамыры x=5 экендигин табабыз. Безунун теоремасы боюнча кубдук теңдеменин сол жагын x-5 ке бөлөбүз.*

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 10 = 0 & x - 5 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 \;\; x + 2 \\ x^2 - 3x & \\ \underline{x^2 - 5x} & \\ 2x - 10 & \\ \underline{2x - 10} & \\ 0 & \end{array}$$

Демек, $(x-5)(x^2 - x + 2) = 0$

$x^2 - x + 2 = 0$, $D = 1 - 8 = -7 < 0$.

Бул квадраттык теңдеменин тамыры жок. Жалгыз тамыр x=5.

Жообу: x=5.

88. Чыгаруу: а) $\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{3x-2} = 3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2}$;

АО: $x \geq 1$, б. а. $[1; +\infty)$.

$\left(\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2}\right)^2$;

$(x+7)(3x-2) = 9(x-1)(x+2)$.

$3x^2 + 19x - 14 = 9x^2 + 9x - 18$,

$6x^2 - 10x - 4 = 0$.

$3x^2 - 5x - 2 = 0$, $D = 25 + 24 = 49$.

$x_{1/2} = \frac{5 \pm 7}{6}$, $x_1 = \frac{5+7}{6} = 2$, $x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$ *бул тамырлардын бирөө гана б.а. x=2 гана аныкталуу областка таандык.*

Жообу: x=2.

б) Чыгаруу: $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$;

Теңдеменин АО: $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$; $x^2 - x - 2 \geq 0$;

$(x-2)(x+1) \geq 0$

$x - 2 \geq 0$, $x \geq 2$;

$x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$. *Демек, АО:* $x \in [3; +\infty)$.

Көбөйтүндүнүн нөлгө барабар болуу шартын пайдаланып:

$\sqrt{x-3}=0$ *жана* $\sqrt{x^2-x-2}=0,$ *Теңдемелерин*
$x-3=0,$ $x^2-x-2=0,$ *алабыз*
$x=3.$ $D=1+8=9,$

$$x_{1/2}=\frac{1\pm3}{2},\ \ x_1=2,\ \ x_2=-1.$$

$x_1=2,\ \ x_2=-1$ *жана* $x_3=3$ *тамырларынын ичинен АОго бир гана* $x_3=3$ *тамыры таандык.*

Жообу: $x_3=3.$

89. а) Чыгаруу: $3\sqrt{2+\sqrt{x}}=x+2;$
Теңдемени АО ты $x\geq 0$ *жана* $x\geq -2$
Демек, АО: $x\geq 0$ *б.а.* $[0;+\infty)$.
Теңдемени чыгарууда суперпозиция методун колдонобуз. Ал үчүн $f(x)=2+\sqrt{x}$ *функциясынын монотондуулугун карайбыз.*
$f'(x)=\left(2+\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0,$ *демек функция өсүүчү.*
Анда $f\big(f(x)\big)=x$ *б.а.*

$f\big(f(x)\big)=2+\ 3\sqrt{2+\sqrt{x}}$ *2-теореманын негизинде* $2+\sqrt{x}=x$ *болот.*
Мындан $x-\sqrt{x}-2=0$ *теңдемесин алабыз.*
$\sqrt{x}=t$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз,*
$t^2-t-2=0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*
$D=1+8=9,$
$t_{1/2}=\frac{1\pm3}{2},t_1=2,\ t_2=-1,$

Демек, $\sqrt{x}=2,$
$x=4.$

Жообу: $x=4.$

б) Чыгаруу: $\sqrt{6+\sqrt{x}}=x-6;$ *АО:* $x\geq 0;$ $x\geq 6,\ x\in[0;+\infty).$
Суперпозиция методун колдонобуз.
$f(x)=6+\sqrt{x}$ *функциясы АОдо өсүүчү, себеби*
$f'(x)=\left(6+\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0,$
демек $f\big(f(x)\big)=6+\sqrt{6+\sqrt{x}}$ *б.а.* $f\big(f(x)\big)=x,$ $f(x)=x,$
$6+\sqrt{x}=x$, $x-\sqrt{x}-6=0$, $\sqrt{x}=t$ *деп алабыз.*
$t^2-t-6=0$, $D=1+24=25,$ $t_1=3,\ t_2=-1,$

Демек, $\sqrt{x}=3,$ $x=9.$

Жообу: $x=9.$

90. *Чыгаруу: а)* $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ x = \frac{8}{y}, \end{cases}$

$\sqrt[3]{\frac{8}{y}} + \sqrt[3]{y} = -3,$ $\frac{2}{\sqrt[3]{y}} + \sqrt[3]{y} = -3,$ $2 + \sqrt[3]{y^2} = -3\sqrt[3]{y},$

$\sqrt[3]{y^2} + 3\sqrt[3]{y} + 2 = 0,$ $\sqrt[3]{y} = t$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.*

$t^2 + 3t + 2 = 0$ *квадраттык теңдемесине ээ болобуз.*

$D = 9 - 8 = 1,$

$t_{1/2} = \frac{-3\pm 1}{2}, t_1 = \frac{-3+1}{2} = -1, t_2 = \frac{-3-1}{2} = -2,$

Демек,

$\sqrt[3]{y} = -1,$ $y = (-1)^3,$ $y_1 = -1.$	$\sqrt[3]{y} = -2,$ $y = (-2)^3,$ $y_2 = -8.$	$x_1 = \frac{8}{-1} = -8.$	$x_2 = \frac{8}{-8} = -1.$

Жообу: (-8;-1); (-1;-8).

б) Чыгаруу: $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1, \end{cases}$

$\sqrt[4]{x} = u$ *жана* $\sqrt[4]{y} = \vartheta$ *жаңы өзгөрмөлөрүн киийребиз.*

$\begin{cases} u^2 - \vartheta^2 = 5, \\ u - \vartheta = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} u^2 - \vartheta^2 = 5, \\ u = 1 + \vartheta, \end{cases}$ $(1+\vartheta)^2 - \vartheta^2 = 5,$

$1 + 2\vartheta + \vartheta^2 - \vartheta^2 = 5,$ $1 + 2\vartheta = 5.$ $2\vartheta = 5 - 1,$ $\vartheta = 2.$

$$u = 1 + 2 = 3$$

$\sqrt[4]{x} = +3,$ $x = 3^4,$ $x = 81.$	$\sqrt[4]{y} = 2,$ $y = 2^4,$ $y = 16.$

Жообу: $x = 81,$ $y = 16.$

Иррационалдык барабарсыздыктар.

91. *а) Чыгаруу:* $\sqrt[4]{x-7} > -3.$ АО: $x \geq 7$ *башкача айтканда* $x \in [7; +\infty)$

Арифметикалык тамырдын касиети боюнча $\sqrt[4]{x-7} \geq 0$ *болот.*

БСЖ *нөлдөн кичине башкача айтканда* $-3 < 0$

Ошондуктан барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү БАО *менен дал келет.*
Демек, чыгарылыш көптүгү $[7;+\infty)$ *болот.*

Жообу: $x \in [7;+\infty)$.

б) Чыгаруу: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-5} \geq \sqrt{5-3x}$;
БАО: $3x+1 \geq 0,\ 3x-5 \geq 0$ *жана* $5-3x \geq 0$

$x \geq -\frac{1}{3},\ x \geq \frac{5}{3}$ *жана* $x \leq \frac{5}{3}$ *Мындан* $x=\frac{5}{3}$ *экендиги келип чыгат. Демек, барабарсыздыктын жалгыз чыгарылышы* $x=\frac{5}{3}$ *болот.*

Жообу: $x=\frac{5}{3}$.

92. Барабарсыздыкты чыгаргыла.
а) Чыгаруу: $\sqrt{5x+2} > \sqrt{8-x}$, *арифметикалык тамырдын касиети боюнча барабарсыздыктын эки жагы тең терс эмес. Демек, 1 – теореманы колдонууга болот.*
СЖ *нын* АО *жы* $5x+2 \geq 0, x \geq -\frac{2}{5}$;
ОЖ *нын* АО *жы* $8-x \geq 0,\ x \leq 8$.
Демек, БАО: $[-\frac{2}{5};8]$

$(\sqrt{5x+2})^2 > (\sqrt{8-x})^2$,
$5x+2 > 8-x$,
$6x > 6$,
$x > 1,\ x\epsilon(1;+\infty)$ *болот.* БАО *ну эске алсак* $x \in (1;+\infty) \cap \left[-\frac{2}{5};8\right] = (1;8]$

Жообу: $x \in (1;8]$.

б) Чыгаруу: $\sqrt{4+3x-x^2} < 2$
БАО: $4+3x-x^2 \geq 0 => (4-x)(1+x) \geq 0 => 4-x \geq 0; 1+x \geq 0$? *2 – теореманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз.*

$$\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ 1+x \geq 0, \\ 4+3x-x^2 < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \\ 3x-x^2 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \\ x(3-x) < 0, \end{cases} \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \\ x < 0 \\ x > 3, \end{cases}$$

мындан $-1 \leq x < 0$ *жана* $3 < x \leq 4$ *келип чыгат Демек, барабарсыздыктын чыгарылышы* $(-1;0) \cup (3;4]$ *көптүгү болот.*

Жообу: $x \in (-1;0) \cup (3;4]$.

93. а) Чыгаруу: $\sqrt[3]{3x-7} > \sqrt[3]{7x+2}$, БАО: $x \in R$.

Барабарсыдыктын эки жагын тең кубка көтөрөбүз:

$(\sqrt[3]{3x-7})^3 > (\sqrt[3]{7x+2})^3$

$3x-7 > 7x+2$

$3x-7x > 2+7$

$-4x > 9$

$x < -\frac{9}{4}$

$x < -2\frac{1}{2}$

Жообу: $x \in \left(-\infty; -2\frac{1}{2}\right)$

б) Чыгаруу: $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$.

БАО: $x+4 \geq 0,\ 2-\sqrt{3+x} \geq 0,\ 3+x \geq 0$

$x \geq -4;\quad x \leq 1;\quad x \geq -3.$

Демек, БАО: $-3 \leq x \leq 1$; *башкача айтканда* $(-3; 1]$

Барабарсыздыктын эки жагын тең квадратка көторобүз:

$(\sqrt{x+4})^2 > (\sqrt{2-\sqrt{3+x}})^2$

$x+4 > 2-\sqrt{3+x}$

$x+2 > -3+x$

$(x+2)^2 > (-\sqrt{3+x})^2$ *дагы квадртка көрөбүз*

$x^2+4x+2 > 3+x$

$$x^2+3x-1 > 0$$

$\left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$

$$\begin{cases} x-\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} > 0, \\ x+\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x > -\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

БАО $-3 \leq x \leq 1$ *болгондуктан, барабарсыздыктын чыгарылышы* $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$ *көптүгү болот.*

Жообу: $x \in \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$

3.4. Модул камтыган теңдемелер жана барабарсыздыктар.

94. а) Чыгаруу: $|x-5| + |3x-8| = 12$, *Теңдемеде эки модуль бар. Модуль ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап, төмөнкү теңдемелерди алабыз.*

$x-5=0 \qquad 3x-8=0$

$x=5 \qquad 3x=8$

$x=\frac{8}{3}$

Демек, берилген теңдеменин сыналуучу чекиттери $x=5$ *жана* $x=\frac{8}{3}$ *болот.*

б) Чыгаруу: $|x|+|x+8|+|2x-5|=7$, *сыналуучу чекиттерин табабыз:*

$x+2=0,\ x+8=0;\ 2x-5=0$

$x=-2;\quad x=-8;\quad 2x=5$

$x=\frac{5}{2}$

Демек, $x=-2,\ x=-8$ *жана* $x=\frac{5}{2}$ *сыналуучу чекиттер болот.*

95. а) Чыгаруу: $|x-1|+|x^3-4x|>5$, *модул ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабарлап, сыналуучу чекиттерди табабыз.*

$x-1=0, \qquad x^3-4x=0,$

$x=1; \qquad x(x^2-4)=0,$

$x(x-2)(x+2)=0$

$x=0,\ \ x-2=0,\ \ x+2=0$

$x=2 \quad x=-2$

Демек $x=1,\ x=0,\ x=2$ жана $x=-2$ *сыналуучу чекиттер болушат.*

б) Чыгаруу: $|2x-7|-|x^3-9|<x^2-3,$

$2x-7=0, \qquad x^2-9=0$

$2x=7, \qquad (x-3)(x+3)=0$

$x=\frac{7}{2}; \qquad x-3=0,\ x+3=0$

$x=3; \qquad x=-3$

Демек, $x=\frac{7}{2},\ x=3$ жана $x=-3$ *сыналуучу чекиттер болушат.*

96. а) Чыгаруу: $|x-3|=2x-8; \qquad AO\colon\ x\in R$

Сыналуучу чекиттерди табабыз:

$x=-3=0$

$x=3$ *бул сыналуучу чекит сан огун* $(-\infty;3)$*жана* $[3;+\infty)$ *интервалдарга бөлөт.*

Бул интервалдарда модул ичиндеги туюнтмалардын белгилери турактуу сакталат.

1) $x \in (-\infty; 3)$ *болсо,* $-(x-3) = 2x - 8$ *теңдемесин алабыз.*

$$-x + 3 = 2x - 8.$$
$$-3x = -11,$$
$$x = \frac{11}{3};$$

$x = \frac{11}{3}$; *бул тамыр* $(-\infty; 3)$ *интервалына таандык эмес чыгарылыш болбойт.*

2) $x \in [3; +8)$ *болсо, теңдемесинин алабыз.*

$$x - 3 = 2x - 8$$
$$x - 2x = -8 + 3$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

$x = 5$, *бул тамыр* $[3; +\infty)$ *интервалына таандык.*

Демек, $x = 5$ *теңдеменин чыгарылышы болот.*

Жообу: $x = 5$

б) Чыгаруу: $|x + 5| = |10 + x|$, *сыналуучу чекиттерин табабыз:*

$x + 5 = 0$, $10 + x = 0$

$x = -5$; $x = -10$ *бул сыналуучу чекиттер сан огун* $(-\infty; -10)$ *жана* $[-10; -5)$, $[-5; +\infty)$ *интервалдарына бөлөт.*

1) $x \in (-\infty; -10)$ *болсо, берилген теңдемеден*

$-(x + 5) = -(10 + x)$ *теңдемесин алабыз.*

$-x - 5 = -10 - x$ *бул теңдеменин тамыры жок.*

2) $x \in [-10; -5)$ *болсо,*

$-(x + 5) = 10 + x$ *теңдемесин алабыз*

$$-x - 5 = 10 + x$$
$$-2x = 15$$
$$x = 15 : (-2)$$
$$x = -7{,}5$$

бул тамыр $[-10; 5)$ *интервалына таандык. ал теңдеменин чыгарылышы болот.*

3) $x \in [-5; +\infty)$ *болсо* $x + 5 = 10 + x$ *теңдемесин алабыз бул теңдеменин тамыры жок.*

Жообу: $x = -7{,}5$.

97. *а) Чыгаруу:* $|x - 7| \leq 0$ *сыналуучу чекиттерин табабыз:*

$x - 7 = 0$

$x = 7$ бул сыналуучу чекит сан огун $(-\infty; 7)$ жана $[7; +\infty)$ интегралдарына бөлөт.

1) $x \in (-\infty; 7)$ болсо $-(x - 7) \leq 0$ барабарсыздыгын алабыз.

$$-x + 7 \leq 0$$
$$-x \leq -7$$

$x \geq 7$ бул чыгарылыш $(-\infty; 7)$ интегралдарына таандык болбойт.

2) $x \in (7; +\infty)$ болсо, $x - 7 \leq 0$ барабарсыздыгын алабыз.

$$x \leq 7$$

$x \leq 7$ чыгарылышы $[7; +\infty)$ интервалына таандык.

$x = 7$ барабарсыздыктын жалгыз чыгарылышы болот.

Жообу: $x = 7$

б) Чыгаруу: $|x - 3| + |x + 2| - x > 5$, АО: $x \in R$.

Сыналуучу чекиттерди табабыз:

$x - 3 = 0$, $x + 2 = 0$

$x = 3$; $x = -2$ бул сыналуучу чекиттер сан огун $(-\infty; -2), [-2; 3)$, $[3; +\infty)$ интервалдарына бөлөт.

1) $x \in (-\infty; -2)$ болсо, берилген барабарсыздыктан

$-(x - 3) - (x + 2) - x > 5$ барабарсыздыгын алабыз.

$-x + 3 - x - 2 - x > 5$

$-3x > 4$

$x < -\frac{4}{3}$ $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$;

2) $x \in [-2; 3)$ болсо, $-(x - 3) + (x + 2) - x > 5$ барабарсыздыгын алабыз.

$$-x + 3 + x + 2 - x > 5$$
$$-x > 5 - 5$$
$$-x > 0$$
$$x < 0$$
$$(-\infty; 0)$$

3) $x \in [3; +\infty)$ болсо, $x - 3 + x + 2 - x > 5$ барабарсыздыгын алабыз.

$x > 5 + 1$

$x > 6$, $(6; +\infty)$ барабарсыздыктын чыгарылышы

$(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$ көптүктөрүнүн биригүүсү болот.

Жообу: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$

Алгебралык теңдемелердин жана барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу.

89. *а) Чыгаруу:* $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 9, \end{cases}$

Гаустун системаны үч бурчтук түрүнө келтирүү методун колдонобуз. Системадагы 1 – теңдеменин эки жагын тең – 3кө көбөйтүп 2 –теңдемеге кошобуз, андан кийин 1 –теңдемени – 2ге көбөйтүп 3 –теңдемеге кошобуз. Натыйжада төмөнкү теңдемелер системасын алабыз.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ -5y - 7z = -17, \\ \ \ -y - 5z = -7; \end{cases}$$

Эми үчүнчү үчүнчү теңдемени – 5ке көбөйтүп 2 – теңдемеге кошобуз. Натыйжада төмөнкү үч бурчтук түрүнө келген теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ -5y - 7z = -17, \\ \qquad 18z = 18; \end{cases}$$

Демек, $18z = 18 => z = 1$.

$z = 1$ *ди 2 – теңдемеге коюп,* y *ти табабыз*

$$-5y - 7 \cdot 1 = -17,$$
$$-5y = -10,$$
$$y = 2;$$

$y = 2, z = 1$ *ди 1 - теңдемеге коюп,* x *ти табабыз.*

$$x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8,$$
$$x = 8 - 7,$$

$x = 1.$ *Жообу:* $(1; 2; 1)$

б) Чыгаруу: $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11 \\ \quad x + y = 5; \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын чыгаруда*

Гаустун ордуна коюу методун колдонобуз. Системадагы экинчи теңдемеден x *ти* y *аркылуу туюнтуп, аны биринчи теңдеме коёбуз.*

$x = 5 - y$.

$(5 - y)^2 + y(5 - y) - y^2 = 11,$

$25 - 10y + y^2 + 5y - y^2 - y^2 = 11,$

$-y^2 - 5y + 14 = 0,$
$y^2 + 5y - 14 = 0,\ D = 25 + 56 = 81$.
$y_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{81}}{2} = \frac{-5+9}{2},\ y_1 = 2,\ y_2 = -7.$
Демек, $x_1 = 5 - 2 = 3,\ x_2 = 5 - (-7) = 12$.

Жообу: $(3; 2)$ *жана* $(12; -7)$.

99. *Чыгаруу: а)* $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 5x - 2y = 11; \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын Крамердин аныктагычтар эрежеси менен чыгарабыз:*

1) Аныктагычтарды таап алабыз.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -4 - 15 = -19;$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-2) - 11 \cdot 3 = -24 - 33 = -57,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 60 = -38.$

Демек, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{-38}{-19} = 2.$ *Жообу:* $(3; 2)$

б) Чыгаруу: $\begin{cases} 3x + 5y = 10, \\ 2x - 4y = 14, \end{cases}$

1) Аныктагычтарды таап алабыз:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} = -40 - 70 = -110,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 20 = 22;$

Демек, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-110}{-22} = 5;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{22}{-22} = -1;$

Жообу: $(5; -1)$.

100. *Чыгаруу: а)* $\begin{cases} x^4 - 3y^2 = -11, \\ 2x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$ *бул теңдемелер ситемасын алгебралык кошуу жолуу менен чыгаоабыз, ал үчүн системадагы 2 –теңдеменин эки жагын тең 3 кө көбөйтүп, 1 – теңдемеге кошобуз.*

$\begin{cases} x^4 - 3y^2 = -11, \\ 6x^2 + 3y^2 = 51, \end{cases}$ *теңдеменин эки жагын тең мүчөлөп кошуп,*

$x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ *биквадраттык теңдемесин алабыз.*

$x^2 = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киитребиз*

$t^2 + 6t - 40 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз.*

$t_1 = 4$ *жана* $t_2 = -10$ *болот.*

Демек, $x^2 = 4$, $x^2 = -10$ *тамырга ээ болбойт.*

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

$x_1 = 2$ *жана* $x_2 = -2$ *маанилерин ситемадагы 2 – теңдемеге коюп, у тин маанилерин табабыз.*

$2 \cdot 2^2 + y^2 = 17,$ $\quad$ $2 \cdot (-2)^2 + y^2 = 17$

$y^2 = 17 - 8,$ $\quad$ $y^2 = 17 - 8,$

$y^2 = 9,$ $\quad$ $y^2 = 9,$

$y_1 = 3,$ $\quad$ $y_3 = 3,$

$y = -3;$ $\quad$ $y_4 = -3$.

Жообу: $(2;3)$, $(2;-3)$, $(-2;3)$, $(-2;-3)$.

б) Чыгаруу: $\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x+y) = 2, \end{cases}$ *системадагы экинчи теңдемени -1ге көбөйтүп, 1- теңдемеге мүчөлөп кошобуз:* $\begin{cases} xy + (x+y) = 29, \\ -xy + 2(x+y) = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} xy + (x+y) = 29, \\ 3(x+y) = 27, \end{cases}$

$$\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ x + y = 9, \end{cases}$$

$x = 9 - y$, $\quad 9 - y$ *ти системанын биринчи теңдемесиндеги x тин ордуна коебуз.*

$y(9-y) + 9 - y + y = 29,$

$9y - y^2 + 9 = 29,$

$y^2 - 9y + 20 = 0, \quad D = 81 - 80 = 1.$

$$y_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}; \quad y_1 = 5; \quad y_2 = 4.$$

Демек, $x + 5 = 9, \quad x + 4 = 9,$

$x_1 = 9 - 5, \quad x_2 = 9 - 4,$

$x_1 = 4; \quad x_2 = 5.$ $\quad$ *Жообу:* $(4;5), (5;4)$

101. а) Чыгаруу: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt{x \cdot y} = 10, \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын жаңы белгисизди кийирүү жолу менен чыгарабыз.*

Теңдеменин АО су: $x \geq 0, y \geq 0.$

$\sqrt{x} = u$ *жана* $\sqrt{y} = \vartheta$ *жаңы өзгөрмөлөрдүкийиребиз.*

$\begin{cases} u + \vartheta = 7, \\ u \cdot \vartheta = 10, \end{cases}$ $\begin{cases} u = 7 - \vartheta, \\ u \cdot \vartheta = 10, \end{cases}$ $\vartheta(7 - \vartheta) = 10, \quad 7\vartheta - \vartheta^2 - 10 = 0,$

$\vartheta^2 - 7\vartheta + 10 = 0,\ \ D = 49 - 40 = 9,$

$\vartheta_{1/2} = \frac{7\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{7\pm3}{2};\ \ \vartheta_1 = 5;\ \ \vartheta_2 = 2.$

Демек, $u_1 = 7 - 5, \quad u_2 = 7 - 2,$

$u_1 = 2, \quad \vartheta_2 = 5;$

$\sqrt{x} = 2, \ \ \sqrt{x} = 5, \quad \sqrt{y} = 5, \ \ \sqrt{y} = 2$

$x_1 = 4; \quad x_2 = 25; \quad y_1 = 25; \ \ y_2 = 4.$ *Жообу:* $(4; 25); \ \ (25; 4)$

б) Чыгаруу:

$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y - 5 = |x-1|, \end{cases} \quad |x-1| = u$

жана $y - 5 = \vartheta$ *жаңы өзгөрмөлөрүн кийиребиз.*

$\begin{cases} u + \vartheta = 1, \\ u = \vartheta, \end{cases} \quad \vartheta + \vartheta = 1, \quad 2\vartheta = 1, \quad \vartheta = \frac{1}{2}$ *демек,* $u = \frac{1}{2}$

$|x-1| = \frac{1}{2}, \ \ x = 1$ *сыналуучу*

$(-\infty; 1)$ *интервалда карайбыз*

$-(x-1) = \frac{1}{2}, \quad x - 1 = -\frac{1}{2},$

$x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \ \ (-\infty; 1)$ *интервалына таандык демек, ал чыгарылыш болот.*

$(1; +\infty)$ *интервалында карайбыз*

$x - 1 = \frac{1}{2}, \ \ x = 1\frac{1}{2}$ *бул тамыр* $(1; +\infty)$ *интервалына таандык, ошондуктан ал чыгарылыш болот.*

$y - 5 = \frac{1}{2},$ *Демек, теңдеменин тамырлары* $x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = 1\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} + 5,$ *жана* $y_{1/2} = 5\frac{1}{2}.$

$y = 5\frac{1}{2}.$

Жообу: $\left(\frac{1}{2}; 5\frac{1}{2}\right); \ \ (1\frac{1}{2}; 5\frac{1}{2})$

102. Чыгаруу: а) $\begin{cases} (x-2)^2 \le 36, \\ x - 1 > 0; \end{cases}$

Системанын АО ты: $x - 1 > 0, x > 1.$

Системанын 1 – барабарсыздыгын чыгарабыз:

$(x-2)^2 \le 36$ *барабапрсыздыгынан келип чыгат.*

$|x-2| \le 6$ *Модулдун касиетин пайдаландык.*

$-4 \le x \le 8$ *демек, системадагы 1 – барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү* $[-4; 8]$ *болот.*

Системадагы 2 – барабарсыздыктын чыгарылышы

$x - 1 > 0, \quad x > 1,$ *демек,* $(1: +\infty)$ *көптүгү болот.*

Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы

$[-4; 8] \cap (1; +\infty) = (1; 8]$ *болот.*

Жообу: $x \in (1; 8]$.

б) Чыгаруу: $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 4x < 0; \end{cases}$

Системадагы 1 – барабарсыздыкты чыгарабыз:

$x^2 - x - 6 \geq 0$, $(x-3)(x+2) \geq 0$ *интевалдар методун колдонуп бул барабарсыздыктын чыгарылышы* $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ *көптүгү экендигин табабыз.*

Эми экинчи барабарсыздыкты чыгарабыз.

$x^2 - 4x < 0$, $x(x-4) < 0$, $\begin{cases} x > 0, \\ x - 4 < 0' \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x < 4. \end{cases}$

Демек, 2 – барабарсыздыктын чыгарылышы $(0; 4)$ *интервалы болот.*

Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \cap (0; 4) = [3; 4)$ *көптүгү болот.*

Жообу $x \in [3; 4)$

103. а) Чыгаруу: $\begin{cases} \sqrt{4-x} + \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[4]{x-4} > 2, \\ \frac{x-5}{x+3} < 0; \end{cases}$

Системасынын АО: $4 - x \geq 0$, $x - 4 \geq 0$, $x \neq -3$;

$x \leq 4$; $\quad x \geq 4$;

Анда берилген барабарсыздыктар системасынын АО: $(-\infty; 4] \cap [4; +\infty) = 4$ *болот.*

Белгисиздин $x = 4$ *мааниси системанын жалгыз чыгарылышы болот. Текшерип көрөбүз.*

$$\begin{cases} \sqrt{4-4} + \sqrt[3]{4+5} - \sqrt[4]{4-4} = \sqrt[3]{9} > 2, \\ \dfrac{4-5}{4+3} = \dfrac{-1}{7} < 0; \end{cases}$$

Жообу: $x = 4$.

б) Чыгаруу: $1 \leq \frac{3-x}{x+2} < 2$; $\quad AO: x \neq -2$;

Берилген барабарсыздыкты төмөндөгүдөй рационалдык барабарсыздыктардын системасы түрүндө жазып алабыз:

$$\begin{cases} \frac{3-x}{x+2} \geq 1, \\ \frac{3-x}{x+2} \leq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3-x}{x+2} - 1 \geq 0, \\ \frac{3-x}{x+2} - 2 \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3-x-x-2}{x+2} \geq 0, \\ \frac{3-x-2x-4}{x+2} \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1-2x}{x+2} \geq 0, \\ \frac{-1-3x}{x+2} \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1-2x \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ -1-3x \leq 0, \\ x+2 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}; \\ x > -2, \\ x \geq -\frac{1}{3}, \\ x > -2; \end{cases}$$

Демек системадагы 1-барабарсыздыктын чыгарылышы $(-2; \frac{1}{2}]$ *көптүгү болот, 2-барабарсыздыктын чыгарылышы* $[-\frac{1}{3}; +\infty)$ *көптүгү болот.*

Анда барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы $\left(-2; \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ *көптүгү болот.*

Жообу: $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

Тиркеме 1.

Тесттик тапшырмалар

Тест – 1.
Сандар менен болгон амалдар.

1. *Эсептегиле.*

$48365 + (3864 + 7992): 26 - 32964.$

а) 3865   б) 16237   в) 8531   г)15857   д)8103

2. *Амалдарды аткаргыла:*

$7^2 + 10^2 \cdot - 2^6$

а) 100   б) 80   в)85   г) 32   д) 150

3. *Эсептегиле:*

$6^3 : 3^3 + 5^2 \cdot (2^3 + 5^3)$

а) 8345   б) 750   в) 1002   г) 2711   д) 3333

4. *Төмөнкү сандардын кайсынысы жөнөкөй сан?*

а) 97   б) 114   в) 237   г) 725   д) 400

5. a, b, c *жана* d *удаалаш сандар болсо,* $\frac{a+b}{b+c}$ *канчага барабар?*

а) 5   б) 7   в) 1   г) 4   д) 2

6. *Төмөндөгүлөрдүн кайсынысы жуп сан?*

а) $7^3 - 5^3$ *б)* $5^{12} - 3^{10} - 1$ *в)* $11^7 + 5^6$ *г)* $10^5 - 3^4$

д) $12^4 + 5^7$

7. $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 666$ *болсо,* $a + b + c$ *суммасы эмнеге барабар?*

а) 17   б)5   в) 10   г) 6   д) 8.

8. *Төмөнкү сандардын кайсынысы 3 кө жана 4 кө бир учурда бөлүнөт?*

а) 1316   б) 2332   в) 2352   г) 6317   д) 3124

9. *5 ке бөлгөндө калдыкта 2 калуучу сандардын формуласы кандай болот?*

а) $3n + 2$ *б)* $5n + 2$ *в)* $2n + 1$ *г)* $5n$ *д)* $-5n + 4$

10. Берилген сандардын ичинен 15 ке бөлүнгөн санды тапкыла:
а) 1461   б) 1325   в) 3545   г) 2130   д) 1840

11.   12 менен 18 сандарынын ЭКЖБсүн тапкыла:
а) 24   б) 6   в) 36   г) 48   д) 9

12.   56 менен 72 сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн тапкыла:
а) 18   б) 28   в) 7   г) 9   д)8

13. 560 жана 432 сандарынын ЭЧЖБсүн Евклиддин алгоритми боюнча тапкыла:
а) 16   б) 12   в) 8   г) 10   д) 32.

14.   40, 50 жана 60 сандарынын ЭКЖБсүн тапкыла:
а) 300 б) 600 в) 820   г) 500   д)360

15. $\overline{abc7}$ *4 орундуу санын үч орундуу* $\overline{abc}$ *санына бөлсөк, толук эмес тийинди менен калдыктын суммасы канчага барабар?*
а) 15   б) 17   в) 20   г) 9   д) 12.

16. ЭКЖБ (18,24) – ЭЧЖБ(20,30) = ?
а) 62   б) 48   в) 56   г) 30   д) 28

17. Эки жөнөкөй санды кошсок сумма дагы жөнөкөй сан болот. Ал сумманы тапкыла.
а) 29   б) 17   в) 13   г) 11   д) 23

18. 1575x1890 *саны кайсы санга бөлүнбөйт?*
а) 2   б) 3 в) 5   г) 7   д) 8
19. $\overline{237x}$ *төрт орундуу саны 15 ке калдыксыз бөлүнүш үчүн* x *тин ордуна кайсы цифра коюлат?*
а) 5   б) 2   в) 7   г) 9   д) 0

20. a *жана* b *натуралдык сандар жана* $a^2 - b^2 = 11$ *болсо,* $a \cdot b$ *көбөйтүндүсүн тапкыла.*
а) 20   б) 30   в) 16   г) 25   д) 52.

Тест – 2.

Бүтүн сандар менен болгон амалдар.

1. Амалдарды аткаргыла.

$-4-6+12+(-5)=?$

а) 5 *б) – 3* *в) 10* *г) 7* *д) – 1*

2. $10-7-12+21-12+18=?$

а) 15 *б) – 5* *в) 18* *г) 7* *д) – 19*

3. $-(-3-5)+(-7+10)-(6-8)=?$

а) 10 *б) – 4* *в) 15* *г) – 3* *д) 13*

4. $[4^3:16+3^3:9\cdot(-1)]+[2^4-(3^2\cdot10):6]^{540}=?$

а) 5 *б) 4* *в) 2* *г) – 3* *д) 7*

5. $-15-(-22)+(-18)-[30-(-18)]=?$

а) – 10 *б) 17* *в) – 18* *г) – 49* *д) 20*

6. $-315:45+(12)\cdot(-10)+27:(-3)=?$

а) – 20 *б) 104* *в) – 70* *г) – 100* *д) 2*

7. $-(x-y+5)+(-x-y+5)=?$

а) $-2x$ *б)* $-2x+10$ *в)* $-2y$ *г)* 10 *д)* $x-y$

8. $-3(24x-12y)+5(-14x+26y)=?$

а) $-45x-10y$ *б)* $-100x$ *в)* $-50y$ *г)* $x+y$ *д)* $-142x-166y$

9. $x>0, y<0$ *болсо, төмөндөгүлөрдүн кайсынысы ар дайым аткарылат?*

а) $x\cdot y>0$ *б)* $x+y=0$ *в)* $x-y<0$ *г)* $x\cdot y<0$

д) $y-x>0$

10. Эгерде $a,b,c\in N$ *болсо жана* $3a+5b+2c=42$ *болсо, а нын эң чоң мааниси канчага барабар?*

а) 4 *б) 10* *в) 7* *г) 20* *д) 15*

11. Төмөндөгүлөрдүн кайсынысы туура эмес?

а) $(-2)^3 > (-3)^3$ *б)* $(-2)^2 < (-3)^2$ *в)* $8 > -100$ *г)* $3 < -30$ *д)* $2 > -50$

12. $\frac{(-1)^5\cdot(-1)^6\cdot(-1)^7\cdot(-1)^8}{(-1)^3:(-1)^4:(-1)^5\cdot(-1)^6}=?$

а) 4 *б) – 1* *в) 1* *г) 2* *д) 3*

Тест – 3.
Бөлчөктөр менен болгон амалдар.

1. $\frac{7}{12}$ *жана* $\frac{11}{18}$ *бөлчөктөрүн салыштыргыла. Төмөндөгүлөрдүн кайсынысы туура?*

а) $\frac{7}{12} > \frac{11}{18}$ *б)* $\frac{7}{12} < \frac{11}{36}$ *в)* $\frac{21}{36} < \frac{22}{36}$ *г)* $\frac{14}{24} > \frac{22}{36}$ *д)* $\frac{7}{36} < \frac{22}{36}$

2. $1\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{29}{25}, \frac{5}{12}$ *бул бөлчөктөрдүн кайсылары дурус бөлчөк?*

а) $\frac{7}{10}; \frac{29}{25};$ *б)* $\frac{5}{12}; 2\frac{3}{5};$ *в)* $\frac{7}{10}, \frac{5}{12},$ *г)* $\frac{29}{25}, 1\frac{1}{2}$ *д)* $2\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$

3. Эсептегиле:

$2\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - 1\frac{7}{12} + \frac{4}{9} - 1\frac{1}{12} + 3\frac{1}{6} = ?$

а) $2\frac{5}{36}$ *б)* $3\frac{7}{18}$ *в)* $4\frac{15}{24}$ *г)* $4\frac{19}{36}$ *д)* $3\frac{29}{36}$

4. Эсептегиле: $17 + 10 : \left(14\frac{6}{25} - 11\frac{37}{50}\right) - 15;$

а) 6; *б)* $2\frac{41}{50}$ *;* *в)* $3\frac{2}{5};$ *г)5;* *д)* $10\frac{1}{2}.$

5. Эсептегиле: $\left(2\frac{1}{4}\cdot 3 - 5\frac{1}{8} : 1\frac{9}{32}\right) : 2\frac{1}{5} - 1\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{11} + 4\frac{4}{5};$

а) $1\frac{7}{15};$ *б)* $\frac{17}{60}$ *;* *в)* $1\frac{35}{48};$ *г)* $5\frac{43}{60};$ *д)* $4\frac{31}{60}.$

6. Эсептегиле: $3 : \frac{3}{3-\frac{2}{3-\frac{1}{3}}};$

а) $\frac{9}{4};$ *б)* $\frac{2}{3}$ *;* *в)* $\frac{5}{6};$ *г)* $1\frac{1}{3};$ *д)* $\frac{4}{9}.$

7. Эсептегиле: $\frac{\left(3+\frac{2}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(4-\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{3}{4}\right)};$

а) $\frac{1}{2}$; *б)* $\frac{2}{5}$; *в)* $\frac{1}{3}$; *г)* $\frac{5}{7}$; *д)* $\frac{3}{5}$.

8. *Куйманын* $\frac{1}{2}$ *бөлүгүн калай,* $\frac{1}{3}$ *бөлүгүн жез, калган бөлүгүн темир түзөт. Темир куйманын канча бөлүгүн түзөт?*

а) $\frac{2}{5}$; *б)* $\frac{1}{6}$; *в)* $\frac{3}{4}$; *г)* $\frac{2}{3}$; *д)* $\frac{5}{6}$.

9. *Эсептегиле:* $\left(1\frac{1}{2}\right)^3+\left(2\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{2}$;

а) $2\frac{1}{4}$; *б)* $1\frac{1}{8}$; *в)* $\frac{2}{5}$; *г)* $\frac{3}{4}$; *д)* $\frac{5}{8}$.

10. *Эсептегиле:* $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot,,,\cdot\left(1-\frac{1}{40}\right)$

а) $\frac{2}{41}$; *б)* $\frac{3}{15}$; *в)* $\frac{1}{40}$; *г)* $-\frac{1}{10}$; *д)* $-\frac{1}{40}$.

11. $\frac{5+a}{a+1}+\frac{a-1}{a+1}$ *туюнтмасы бүтүн сан маанисин алуу үчүн, а кандай сандар болушу мүмкүн?*

а) $\{-3,-2,0,1\}$; *б)* $\{-1,\ 0,2,3\}$; *в)* $\{0,2,3,4\}$; *г)* $\{-4,-3,3,5\}$; *д)* $\{-4,-1,1,2\}$.

12. $\frac{1}{8}$ *жана* $\frac{1}{7}$ *сандарынын арасында төмөнкү сандардын кайсынысы жатат?*

а) $\frac{1}{168}$; *б)* $\frac{27}{190}$; *в)* $\frac{7}{168}$; *г)* $\frac{3}{112}$; *д)* $\frac{15}{112}$.

Тест -4. Ондук бөлчөктөр.

1. *Эсептегиле:* $(1{,}32+2{,}54)\cdot(2{,}75-1{,}05)=?$

а) 10,422; *б)* 3,75; *в)* 5; *г)* −14,2; *д)* 9,14.

2. *Эсептегиле:* $0{,}125\cdot16+28:0{,}56+7{,}5-0{,}12\cdot7=?$

а) 4,09; *б)* 40,5; *в)* 12,9; *г)* 45,34; *д)* 36,7.

3. *Эсептегиле:* $(1{,}87+1{,}955):0{,}85-(2\cdot1{,}75-3{,}5)\cdot4{,}62=?$

а) 3; *б)* 2,4; *в)* 0; *г)* 4,57; *д)* 4,5.

4. *Эсептегиле:* $875\cdot0{,}01+0{,}175\cdot10^2=?$

а) $10{,}7$; *б)* $26{,}25$; *в)* $9{,}76$; *г)*$2{,}75$; *д)* $8{,}9$.

5. *Эсептегиле:*
$2{,}5 \cdot 10^6 + 0{,}14 \cdot 10^8 - [300 \cdot 10^4 - (25000 \cdot 10^2)] =?$
а)$5 \cdot 10^8$; *б)* $16 \cdot 10^6$; *в)* $4 \cdot 10^9$; *г)*$25 \cdot 10^4$; *д)* $12 \cdot 10^5$.

6. *Эсептегиле:* $\frac{0{,}001}{0{,}0001} + \frac{0{,}24}{0{,}012} + \frac{2{,}24}{0{,}16} =?$
а) 25; *б)* 60 ; *в)*44; *г)*30; *д)* 70.

7. *Эгерде* $a = 4{,}5$ *жана* $b = 2{,}6$ *болсо,*
$3{,}4a + 2{,}7b - 0{,}4a + 1{,}3b$ *туюнтмасынын маанисин тапкыла:*
а) $23{,}9$; *б)* $15{,}4$; *в)*$-5{,}9$; *г)*$20{,}4$; *д)* $18{,}6$.

8. *Эгерде* $m = 0{,}77 + 1{,}41$ *жана* $n = 4{,}608 : 1{,}8$ *болсо,* m *жана* n *сандарын салыштыргыла.*
а) $m > n$; *б)* $n \le m$; *в)*$m = n$; *г)*$m < n$; *д)* *белгисиз.*

9. *Эсептегиле:* $\frac{0{,}027:0{,}3}{0{,}0081:0{,}9} - \frac{0{,}0256:2}{0{,}1024:4} =?$
а) $0{,}25$; *б)* $2{,}8$; *в)*$9{,}5$; *г)*$0{,}9$; *д)* $0{,}8$.

10. $150\text{мм} + 24\text{дм} + 6310\text{см} - 245\text{мм} =?$ *Жообун метрге чейин тегеректегиле.*
а) 70; *б)* 65 ; *в)*100; *г)*24; *д)* 50.

11. *Эсептегиле:* $\frac{1{,}4^2 - 0{,}6^2}{2{,}4 \cdot 1{,}6 - 1{,}6^2} =?$
а) $-\frac{5}{8}$; *б)* $\frac{2}{3}$; *в)* $\frac{5}{2}$; *г)* $\frac{5}{4}$; *д)* $\frac{7}{9}$.

12. *Эгерде* $A = \frac{14}{25}$, $B = \frac{9}{12}$ жана $C = 0{,}59$ *болсо, төмөндөгүлөрдүн кайсынысы туура.*
а) $A < C < B$; *б)* $C < A < B$; *в)* $A < B < C$; *г)* $B < AC$; *д)* $C < B < A$.

Тест-5. Өзгөрүлмөлүү туюнтмалар жана аларды өзгөртүүлөр.

1. *Эгерде* $a = 5$, $b = 3$ *болсо,* $a^2 - 2(10 - b^2)$ *туюнтмасынын маанисин тапкыла.*

а) 5; *б)* 23 ; *в)* 7; *г)* 10; *д)* -1.

2\. *Кашааларды ачкыла* $5(2a-b+3)-2(5a-3b+7)$

а) $2a+5$; *б)* $b+1$; *в)* $a+3b$; *г)* 5; *д)* $3a-b+5$.

3\. *Жөнөкөйлөткүлө:* $2x^2+8x-4(x^2+2x-2)$;

а) $3x^2+x$; *б)* $x+5$; *в)* $-2x^2+8$; *г)* x^2-7; *д)* 8.

4\. *Эгерде* $A=3x+2)$, $B=x-3$ *болсо,* $A\cdot B=?$

а) 5; *б)* $x-3$; *в)* x^2+5; *г)* $3x^2-7x-6$; *д)* x^2-5x.

5\. *Жөнөкөйлөткүлө:*

$3x^2y^2-2x^2y-x^2y^2+xy^2-2x^2y^2+3x+2x^2y-xy^2-y=?$

а) $2x^2y^2+5xy^2-x+y$;

б) xy^2-2x^2y+5;

в) $3x-y$;

г) $5x^2y^2-x-y$;

д) $3x$.

6\. *Эгерде* $x=5$ *жана* $A=\frac{2x+8}{x-2}$ *болсо,* $A=?$

а) 7; *б)* -3 ; *в)* 10; *г)* -9; *д)* 6.

7\. $3a^2+1$ *менен* $\frac{5-15a^2}{5}$ *туюнтмасынын суммасын тапкыла:*

а) $2a^2+1$; *б)* 2 ; *в)* $-3a^2$; *г)* 5; *д)* a.

8\. $\left(\frac{1}{x}\right)^4+\left(\frac{3}{2}\right)^3$ *төмөндөгү туюнтмалардын кайсынысына барабар?*

а) $(5x-27)Y2x$; *б)* $\frac{3x^4+1}{x^4}$; *в)* $\frac{27x^4+8}{8x^4}$; *г)* $\frac{27x^3-8}{6x^4}$; *д)* $\frac{x^2+27}{8x^4}$.

9\. $5a^2b^3c$ *жана* $3ab^4c^5$ *туюнтмаларынын көбөйтүндүсү эмнеге барабар?*

а) $5a^3b^7c^6$; *б)* $5a^4b^3c^7$; *в)* $15a^4b^5c^6$; *г)* $-10a^3b^7c^6$;

д) $15a^2bc^7$.

10\. $(x-3)(x+3)-(x-4)(x+4)=?$

а) x^2-15 *б)* $3x+16$ *в)* $2x^2-x$ *г)* 7 *д)* $2x^2$

Тест – 6. Натурал көрсөткүчтүү даража

1 Кубдун кыры 5 см. Анын көлөмүн тапкыла:
а) $V = 15\text{см}^3$ *б)* $V = 10\text{см}^3$ *в)* $V = 25\text{см}^2$
г) $V = 120\text{см}^3$ *д)* $V = 125\text{см}^3$

2. кыры 4см болгон кубдун толук бетинин аянтын тапкыла:
а) $16\ \text{см}^2$ *б)* $64\ \text{см}^2$ *в)* $96\ \text{см}^2$ *г)* $100\ \text{см}^2$ *д)* $32\ \text{см}^2$

3. Эгерде $a = 5$ *болсо,* $(a^3 \cdot a^4 \cdot a^5):(a \cdot a^2 \cdot a^6) = ?$
а) 25 б) 100 в) 64 г) 125 д) 50

4. Эсептегиле: $\frac{0{,}5^{10}}{(0{,}5 \cdot 0{,}5^3)^2} = ?$
а) 10 б) 0,25 в) 1,25 г) 1 д) 5

5. Жөнөкөйлөткүлө: $\frac{(-2abx)^4}{(3abx)^3} = ?$
а) $\frac{16abx}{27}$ *б)* $\frac{-8a^2bx}{9}$ *в)* $\frac{16a^2bx}{17}$ *г)* $\frac{abx}{3}$ *д)* $\frac{-2abx}{3}$

6. $(3^5 - 3^4)(3^3 + 3^2)$ *саны 3 түн даражасынан башка кайсы сандын даражасына бөлүнөт?*
а) 5^3 *б)* 7^2 *в)* 2^3 *г)* 4^3 *д)* 19^2

7. $(5^6 + 5^4)(5^2 - 1)$ *көбөйтүндүсү кайсы эки орундуу жөнөкөй санга бөлүнөт?*
а) 11 б) 19 в) 17 г) 13 д) 23

8. $A = (-5{,}1)^7$ *жана* $B = (-2)^4$ *болсо, төмөнкүлөрдүн кайсынысы туура?*
а) $A > B$ *б)* $A = B$ *в)* $B > A$ *г)* $A \geq B$ *д) белгисиз*

9. Амалдарды аткар: $0{,}5 \cdot 3^3 - 0{,}3 \cdot 2^4$
а) 8,7 б) 15 в) 3,9 г) 10 д) – 5

10. Жөнөкөйлөткүлө: $[(2x^2y^3)^2]^4$

а) $16x^8y^{12}$ *б)* $24x^{12}y^{16}$ *в)* $2^5 \cdot x^{14}y^{10}$ *г)* $2^8 \cdot x^{10}y^{12}$ *д)* $2^8x^{16}y^{24}$

Тест – 7. Бир өзгөрмөсү бар теңдемелер жана эки белгисиздүү теңдемелер системалары.

1. Төмөнкү сандардын кайсынысы $5x - 2(x+1) = 10$ *теңдемесинин тамыры болот?*
а) 5 б) – 3 в) 4 г) 10 д) – 1

2. Теңдемени чыгаргыла:
$12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$
а) 5 б) – 12 в) 10 г) 2 д) – 3

3. Теңдемени чыгаргыла: $2x + \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$
а) 2 б) $4\frac{1}{2}$ в) -3 г) $1\frac{1}{3}$ д)$2\frac{1}{5}$

4. Өзгөрмөнүн кандай маанилеринде $3x + 1$ *туюнтмасынын мааниси* $8x + 12$ *туюнтмасынын маанисинен 4 эсе кичине болот.*
а) 5 б)-4 в) 6 г)2 д)3

5. y тин кайсы маанисинде $5y + 2$ *туюнтмасынын мааниси* $2y + 5$ *туюнтмасынын маанисинен 12ге чоң болот.*
а)5 б)4 в)-6 г)2 д)1

6. Теңдемени чыгаргыла: $5{,}6 - 7y = -4(2y - 0{,}9) + 2{,}4.$
а)3 б) 0,4 в)3б2 г)-2 д)-1,2

7. Теңдемелер системасын чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

а) (1;1) б) (3;2) в) (-1;2) г) (3;-2) д) (2;1)

8. Теңдемелер системасынын чыгаргыла.

$$\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x, \\ 12(x+y)-15=7x+12y; \end{cases}$$

а) *(2;-1)*   *б) (-3;1)*   *в)* $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$ г) $(0;1)$ д) $(5;-3)$

9) *Теңдемелер системасын чыгаргыла*

$$\begin{cases} y-x=20, \\ 2x-15=-1; \end{cases}$$

а) $(5;-6)$ б) $(-23;-3)$ в) $(0;1)$ г) $(2;1)$ д) $(-3;-2)$

10. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} 2x=11-3y, \\ 6y=22-4x; \end{cases}$$

а) чексиз көп чыгарылыш   б) $(3;4)$ в) $(-1;2)$

г) $(0;1)$ д) $(2;-3)$

Тест-8. Теңдемелердин жана теңдемелер системасынын жардамы менен маселелерди чыгаруу.

1. Эки жумушчу 100 тетик даярдашкан. Экинчи жумушчу биринчисине караганда 10 тетик көп даярдаган. Жумушчулар канчадан тетик даярдаган?

а) $(30;40)$;   *б)* $(50;60)$;   *в)* $(45;55)$;   *г)* $(40;60)$;   *д)* $(70;30)$.

2. Чарбада техниканы туура пайдалануунун негизинде 12 трактор бошотулган. Эгерде чарбадагы тракторлор калган тракторлордон 1,5 эсе көп болсо, чарбада канча трактор калган?

а) 30;   *б)* 24;   *в)* 20;   *г)* 18;   *д)* 26.

3. Үч бурчтуктун периметри 26 см жана анын эки жагы барабар. Алар үчүнчү жагынан 4 см ге чоң. Үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

а) $(8;8;4)$;   *б)* $(9;9;5)$;   *в)* $(12;12;8)$;   *г)* $(10;10;6)$;
д) $(5;5;2)$.

4. Сулаймандын 6 уулу бар. Бири экинчисинен 4 жашка айырмаланат, ал эми эң улуусу эң кичүүсүнөн 3 эсе улуу. эң кичүүсүнүн жашы канчада?

а) 10; *б)* 8; *в)*12; *г)* 6; *д)* 4.

5. Асан бир сан ойлоп, анын оң жагына бир нөл жазып, андан 208ди кемитсе, эки эселенген ойлонулган сан келип чыкты. Ал кайсы сан?

а) 30; *б)* 25; *в)*32; *г)* 18; *д)* 26.

6. Он жыл мурда атасы уулунан 10 эсе улуу эле, ал эми 22 жылдан кийин ал уулунан 2 эсе улуу болот. Азыр атасы канчада?

а) 40; *б)* 50; *в)*32; *г)* 44; *д)* 36.

7. Кездемелердин биринчи түрүнүн чекене баасы 10%га, ал эми экинчисиники 15%га арзандатылды. Сатып алуучу биринчи түрдөгү кездеменин 6 метрине жана экинчи түрдөгү кездеменин 10 метрине биригип 261 сом төлөдү. Эгерде биринчи түрдөгү кездеменин алгачкы баасы экинчисиникинен 2 сомго кымбат турса, анда сатып алуучу ушул эле өлчөмдөгү кездемелер үчүн баа төмөндөгөнчө канча сом төлөмөк?

а) 280; *б)* 310; *в)*400; *г)* 300; *д)* 360.

8. Эки темир уста бир күндө 90 тетик жасайт. Биринчи уста эмгек өндүрүмдүүлүгүн 10%га, экинчи уста 20%га жогорулатып, бир күндө 103 тетик жасашты. Алардын ар бири бир күндө канчадан тетик жасашкан?

а) (30; 25); *б)* (60; 50); *в)* (55; 48); *г)* (50; 43); *д)* (60; 33).

9. Эмил менен Кемел бирден сан ойлошту. Эмил ойлогон санын 2ге, Кемел 3кө көбөйтүп, көбөйтүндүлөрдү кошушканда 85 чыкты. Эгерде ойлонулган сандардын суммасы 35 болсо, алар кайсы сандар?

а) (18; 17); *б)* (20; 15); *в)* (25; 10); *г)* (19; 16); *д)* (21; 14).

10. Топ чымчык учуп келип, бир нече чырпыкка конмой болушту. Чырпыктарга бирден конушса, бир чымчык ашып калды, экиден конушса бир чырпык ашып калды. Канча чымчык канча чырпык болгон?

а) (4; 3); *б)* (5; 6); *в)* (2; 3); *г)* (4; 5); *д)* (10; 9).

Тест-9. Катыш, пропорция, пайыз.

1. Пропорциянын белгисиз мүчөсүн тапкыла.

$$\frac{x}{25} = \frac{6}{75};$$

а) 5; *б)* 2; *в)*3; *г)* 10; *д)* 1.

2. 192 санын 3:5 катышында бөлүштүргүлө.

а) (72; 120); *б)* (80; 130); *в)* (15; 30); *г)* (40; 60); *д)* (35; 45).

3. $\frac{x+5}{x+8} = \frac{3}{4}$; $x = ?$

а) 5; *б)* 2; *в)7*; *г)* 4; *д)* 10.

4. Короодогу койлордун эчкилердин санына болгон катышы 6:5. Уйлардын санынын кой-эчкилердин санына болгон катышы $\frac{1}{11}$. *Эгерде короодо уйлар бешөө болсо, койлордун саны канча?*

а) 28; *б)* 40; *в)30*; *г) 25*; *д)* 10.

5. Мектепке алма, терек жана өрүк көчөтторүн отургузушту. Алардын сандарынын ирети менен катышы 3:5:7 болот. Көчөттөрдүн саны 150 болгон болсо, терек көчөттор канча?

а) 40; *б)* 25; *в)60*; *г) 48*; *д)* 50.

6. Токарь 4 саатта 18 тетик даярдады. Ал 72 тетикти канча саатта даярдайт?

а) 16; *б)* 15; *в)20*; *г) 12*; *д)* 10.

7. Курулушка керектелчүү кумду 4 "КаМАЗ" 3 күндө ташыйт. Ушул эле өлчөмдөгү кумду 6 "КаМАЗ" канча күндө ташыйт?

а) 1; *б)* 1,5; *в)4*; *г) 2*; *д)* 5.

8. Багуудагы тооктордун, өрдөктордүн жана каздардын сандарынын катышы 4:3:2 ге барабар. Эгерде өрдөктөрдүн саны 105 болсо, тооктор менен каздардын жалпы саны канча?

а) 120; *б)* 210; *в)170*; *г) 200*; *д)* 180.

9. 15 саны 60 тын канча пайызын түзөт?

а) 20; б) 30; в) 25; г) 40; д) 18.

10. 12%дуу 200г туз эритмесинен 10%дуу эритме алуу үчүн ага канча суу кошуу керек?

а) 40г; б) 35г; в) 50г; г) 45г; д) 100г.

11. a санынын b%ы $3b$ га барабар. a кайсы сан?

а) 150; б) 200; в) 100; г) 300; д) 270.

12. a саны b санынан 30% га аз, ал эми c саны d санынан 10%га аз болсо, $a \cdot c$ саны $b \cdot d$ санынын канча пайызын түзөт?

а) 40%; б) 63%; в) 50%; г) 45%; д) 60%.

Тест-10. Кыскача көбөйтүүнүн формулалары. Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.

1. Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

$$a^2 - 9b^2;$$

а) $3a(a-b)$; б) $(a+b)(a+b)$; в) $(a-b)(a+9b)$;

г) $(a-3b)(a+3b)$; д) $3b(a-3b)$.

2. Көп мүчөгө өзгөрткүлө.

$$(2x+y)^2$$

а) $4x^2+4xy+y^2$; б) $4x^2-4xy+y^2$; в) $4x^2+4xy-y^2$;

г) $4x^2-4xy-y^2$; д) $4x^2+2xy+y^2$.

3. Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла: $8a^3 - b^3$;

а) $(a-b)(a^2-b^2)$; г) $(a-b)(a^2+ab-b^2)$;

б) $(2a+b)(4a^2-b^2)$; д) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$.

в) $(2a-b)(4a^2+b^3)$;

4. $a, b \in N$ жана $a > b$ болсо, $a^2+b^2 = 50$.

$$a - b = ?$$

а) 5; б) 6; в) 3; г) 7; д) 2.

5. Көп мүчөгө өзгөрткүлө: $(x-2y)^3$;

а) $x^3-6x^2y+10xy^2-y^3$; г) $x^3+3x^2y-3xy+y^2$;

б) $x^3-3x^2y+12x^2-y^3$; д) $x^3+3x^2-3xy-y^3$.

в) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - y^3$;

6. *Эсептегиле:* $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2$;
а) 2 ; *б)* 5; *в)* 1; *г)* 3; *д)* 10.

7. *Көбөйтүүлөргө ажыраткыла:* $\frac{x^2}{49} - \frac{25}{y^2}$;
а) $\left(\frac{x}{7} - \frac{5}{y}\right)\left(\frac{x}{7} - \frac{5}{y}\right)$; г) $\left(\frac{x}{7} - y\right)\left(x + \frac{y}{5}\right)$;
б) $\left(\frac{7}{x} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{7}{x} + \frac{y}{5}\right)$; д) $\left(\frac{x}{7} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{7} + \frac{y}{5}\right)$.
в) $\left(x - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{7} + y\right)$;

8. *Эгерде* $a^2 + b^2 = 13$ *жана* $a \cdot b = 6$ *болсо,* $(a - b)^2 = ?$
а) 3 ; *б)* 1; *в)* – 2; *г)* 5 ; *д)* 4.

9. *Эгерде* $m^2 - 2mn + n^2 = 4$ *болсо, анда* $(m - n)^8 = ?$
а) 100; *б)* 256; *в)* 16 ; *г)* 64; *д)* 81.

10. *Эгерде* $x > 0$ *жана* $x^2 - 1 = 40 \cdot 42$ *болсо,*
а) 45; *б)* 43; *в)* 41; *г)* 39; *д)* 50.

Тест – 11. Квадраттык тамыр. Квадраттык теңдемелер.

1. *Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:* $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} = ?$
а) $\sqrt{7} - 3$; *б)* $3 + \sqrt{7}$; *в)* $\sqrt{7} + 3$; *г)* $3 - \sqrt{7}$; *д)* $\sqrt{3} - 7$.

2. *Теңдемени чыгаргыла:* $\sqrt{(x - 5)^2} = x - 5$;
а) -5; *б)* 3; *в)* $x \geq 5$; *г)* $x \leq 5$; *д)* $x = 0$.

3. *Туюнтманы кыскарткыла:* $\sqrt{(8 - 2\sqrt{5})^2}$;
а) $2\sqrt{5} - 8$; *б)* $4 - 2\sqrt{5}$; *в)* $2\sqrt{5} + 1$; *г)* $8 - 2\sqrt{5}$;
д) $8 + 2\sqrt{5}$.

4. *Эсептегиле:* $\sqrt{50 \cdot 24 \cdot 3}$;
а) 50; *б)* 60; *в)* 45 ; *г)* 30; *д)* 70.

5. *Эсептегиле:* $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{82^2 - 18^2}$;
а) 82; *б)* 70 ; *в)* 90; *г)* 65; *д)* 72.

6. *Теңдемени чыгаргыла:* $5x^2 - 20x = 0$;
а) $(1; 4)$; *б)* $(0; 2)$; *в)* $(-4; 0)$; *г)* $(2; -2)$; *д)* $(0; 4)$.

7. *Теңдемени чыгаргыла:* $(x + 5)(2x - 7) = 0$;
а) $(5; 7)$; *б)* $(-5; 7)$; *в)* $\left(-5; 3\,\frac{1}{2}\right)$; *г)* $(5; 4)$; *д)* $(0; 7)$.

8. *Теңдемени чыгаргыла:* $8x^2 - 14x + 5 = 0$;
а) $(2; 3)$; *б)* $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{4}\right)$; *в)* $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$; *г)* $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$; *д)* $\left(0; \frac{5}{4}\right)$.

9. *Теңдемени чыгаргыла:* $(2x^2 + 3)^2 + 11 = 12(2x^2 + 3)$;
а) $(-2; 2)$; *б)* $(1; 2)$; *в)* $(-2; 1)$; *г)* $(-2; 3)$; *д)* $(3; 2)$.

10. $5x^2 - 7x - 9 = 0$ *теңдемесинин тамырларынын суммасын жана көбөйтүндүсүн тапкыла.*
а) $(7; -9)$; *б)* $\left(\frac{7}{5}; -9\right)$; *в)* $(-7; -9)$; *г)* $(1; 2)$; *д)* $\left(\frac{7}{5}; -\frac{9}{5}\right)$.

11. $x^2 + bx - 12 = 0$ *теңдемесинин бир тамыры 3 кө барабар болсо,* b *коеффициентин тапкыла:*
а) 2; *б)* 1 ; *в)* – 1; *г)* 3; *д)* – 2.

12. $x^2 + px + q = 0$ *теңдемесинин тамырларынын айырмасы 1 ге, ал эми тамырларынын квадраттарынын айырмасы 5 ке барабар болсо* p *жана* q *ларды тапкыла:*
а) $(2; 3)$ *б)* $(5; 1)$ *в)* $(-5; 6)$ *г)* $(-5; 3)$ *д)* $(4; 6)$

Тест – 12. Бүтүн көрсөткүчтүү жана рационал көрсөткүчтүү даражалар. n – даражалуу тамыр.

Аныктама.

Эгерде $a \neq 0$ *жана* n *саны бүтүн терс сан болсо, анда* $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ *же* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *болот.*

Мисалы. $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $(\frac{1}{2})^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.

1. Эсептегиле: $2^5 \cdot 2^{-7} \cdot 2^6 \cdot 2^{-2}$;

а) 3; *б)* 4; *в)* 7; *г)* $\frac{1}{2}$; *д)* -2.

2. Жөнөкөйлөткүлө: $(x^2 - y^2) : (x^{-1} - y^{-1})$;

а) $xy(x - y)$; *б)* $xy(x + y)$; *в)* $x^2y(x + y)$; *г)* $-xy(x - y)$; *д)* $xy^2(x - y)$.

3. Теңдемени чыгаргыла: $x^9 = 512$;

а) 1; б) 3; в) 2; г) – 1; д) – 2.

4. Теңдемени чыгаргыла. $(x - 3)^4 = 81$

а) $(2; 3)$; *б)* $(-1; 2)$; *в)* $(3; 1)$; *г)* $(3; -1)$; *д)* $(0; 6)$.

5. Эсептегиле: $\sqrt[4]{0{,}0081} + \sqrt[3]{1000} - \sqrt[5]{3125}$

а) 5; б) 2,5; в) 3,4; г) 5,3; д) – 4.

6. Эсептегиле: $\sqrt[12]{2^{48}} + \sqrt[3]{-729} - \sqrt[3]{-1000}$

а) 12; б) 17; в) – 15; г) 20; д)14.

7. Эсептегиле: $\sqrt[3]{3^3} + \sqrt[4]{4^2} + \sqrt[10]{5^{20}} = ?$

а) 12; б) 18; в) 9; г) 15; д) 30.

8. Эсептегиле: $\sqrt[3]{2^{-6}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$

а) 2; б) 4; в) 1; г) 8; д) 3.

9. Эсептегиле: $5^{\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} + 4^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} + (\frac{27}{125})^{\frac{1}{3}}$

а) $15\frac{1}{3}$; *б)* $12\frac{3}{5}$; *в)* 20; *г)* 30; *д)* $27\frac{3}{5}$.

10. *Жөнөкөйлөткүлө:* $(x^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,4})^3 \cdot x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2}$

а) xy; *б)* $\frac{1}{xy}$; *в)* $x^2 \cdot \frac{1}{y}$; *г)* x; *д)* $y \cdot \frac{1}{x}$.

11. *Жөнөкөйлөткүлө:* $a^{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$

а) $a^{\frac{2}{3}}$; *б)* $\sqrt[6]{a}$; *в)* $\sqrt[3]{a}$; *г)* $\sqrt[5]{a}$; *д)* $a^{\frac{3}{5}}$.

12. *Теңдемени чыгаргыла:* $(x^3 + 5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{32}$;

а) 2; *б)* 10; *в)* 5; *г)* 3; *д)* 1.

Тест – 13. Рационалдык теңдемелер. Модулдуу теңдемелер. Барабарсыздыктар.

1. *Теңдемени чыгаргыла:* $\frac{y^2-6y}{y-5} = \frac{5}{5-y}$;

а) $(5; 1)$; *б)* $(2; -3)$; *в)* $(1; 4)$; *г)* $(5; 2)$; *д)* $(1; 3)$.

2. *Теңдемени чыгаргыла.* $\frac{4}{x+3} = \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1$

а) $(2; 3)$; *б)* $(-1; 4)$; *в)* $(5; 2)$; *г)* $(3; 1)$; *д)* $(-9; 1)$.

3. *Теңдемени чыгаргыла.* $\frac{21}{x+1} = \frac{16}{x-2} - \frac{6}{x}$;

а) $(5; 3)$; *б)* $\left(6; -\frac{2}{11}\right)$; *в)* $(1; -1)$; *г)* $(4; 3)$; *д)* $(5; 6)$.

4. *Теңдемени чыгаргыла.* $|5x + 3| = 8$;

а) $(2; 3)$; *б)* $(1; 2)$; *в)* $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$; *г)* $\left(1; -\frac{11}{5}\right)$; *д)* $(3; 5)$.

5. *Теңдемени чыгаргыла.* $|x + 4| = |8 + x|$;

а) -6; *б)* 5; *в)* 1; *г)* 4; *д)* -4.

6. *Теңдемени чыгаргыла.* $|x^2 - x| = 5x - 5$;

а) $(4; 1)$; *б)* $(3; 2)$; *в)* $(0; 1)$; *г)* $(1; 5)$; *д)* $(10; 2)$.

7. *Барабарсыздыкты чыгаргыла.* $|x + 7| \geq 3$;

а) $(-\infty; 10)$; *б)* $[-5; +\infty)$; *в)* $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$;
г) $(-\infty; -10] \cup [-4; +\infty)$; *д)* $(-10; -4)$.

8. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|6-2x|<7$

а) $(-1;4)$ *б)* $\left(\frac{1}{2};3\right)$ *в)* $\left(\frac{1}{3};1\right)$ *г)* $\left(-\frac{1}{2};\frac{13}{2}\right)$ *д)* $(4;10)$

9. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|3x^2-x+5|<-2$;

а) 5 ; б) – 3 ; в) (-2;5); г) ϕ; *д)* $(-\infty;2)$.

10. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла

$$\begin{cases}5x-3\le 3x+1,\\ 3x+2>2x-7,\end{cases}$$

а) $x\le 1$; *б)* $-2<x<3$; *в)* $-y<x\le 2$; *г)* $x>3$; *д)* $x>5$

11. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases}5(x+1)-x>2x+2,\\ 4(x+1)-2\le 2(2x+1)-x;\end{cases}$$

а) $-\frac{3}{2}<x\le 0$; *б)* $x\ge 4$; *в)* $x<5$; *г)* $-2\le x<3$; *д)*ϕ.

12. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{6}\le\dfrac{3x-1}{4}\\ \dfrac{x+2}{3}>\dfrac{x+3}{5}\end{cases}$$

а) $x\le 2$; *б)* $x>-\frac{1}{2}$; *в)* $x<0$; *г)* $x\ge -5$; *д)* $x>3$.

Тест – 14. Прогрессиялар.

1. –4,-1,2,... арифметикалык прогрессиясынын 20 – мүчөсүн тапкыла:

а) 50; б) – 40; в) 35; г) 45; д) 53.

2. 1, 6, 11, 16,... арифметикалык прогрессиясынын n *– мүчөсүнүн формуласын жазгыла.*

а) $3n$; *б)* $2n+1$; *в)* $5n-4$; *г)* $4n+1$; *д)* $3n-2$.

3. – 20 саны 30, 25, 20,... арифметикалык прогрессиясынын канчанчы мүчөсү болот?

а) 15; б) 8 ; в) 11; г) 15; д) 20.

4. Эгерде $a_{10} = 41,\ a_{30} = 121,$ болсо, a_{20} ны тапкыла.
а) 81; б) 90 ; в) 80; г) 52; д) 20.

5. Арифметикалык прогрессияда $a_2 + a_4 = 16,\quad a_7 + a_9 = 46$ болсо, $a_3 + a_8$ди тапкыла:
а) 40; б) 35 ; в) 50; г) 31; д) 25.

6. 149дан 160ка чейинки бардык үч орундуу сандардын суммасын тапкыла.
а) 2300; б) 1854 ; в) 1746; г) 1800; д) 1850.

7. $2x-1,\quad 2x+2$ жана $x+8$ сандары арифметикалык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү болсо, ал сандарды тапкыла.
а) 1;5;9 б) 2;7;12 в) 5;8;11 г) 1;3;5 д) 5;10;15.

8. Эгерде $S_n = 2n^2 - 3n$ болсо, a_8 мүчөнү тапкыла.
а) 12; б) 30 ; в) 25; г) 15; д) 27.

9. 1;2;4;8,..., геометриялык прогрессиясынын 7-мүчөсүн тапкыла.
а) 64; б) 32 ; в) 28; г) 50; д) 70.

10. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ формуласы менен берилген геометриялык прогрессиянын алгачкы үч мүчөсүн жазып чыккыла.
а) 3;2;1 б) 3;9;18 в) 1;3;9 г) 3;6;12 д) 2;4;8.

11. **2; x** жана **32** сандары геометриялык прогрессиянын алгачкы үч мүчөсү болсо, **x** ти тапкыла.
а) 5; б) 8 ; в) 10; г) 12; д) 9.

12. 192 саны 3,6,12,..., геометриялык прогрессиясынын канчанчы мүчөсү болот?
а) 10; б) 5 ; в) 7; г) 9; д) 6.

13. 1+2+4+,...,+128 суммасын тапкыла.
а) 255; б) 300 ; в) 220; г) 250; д) 240.

14. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ болсо, S_4 ту тапкыла.
а) 200; б) 250 ; в) 150; г) 190; д) 160.

15. Чексиз кемүүчү $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ геометриялык прогрессиясынын суммасын тапкыла.
а) $\frac{1}{2}$; б) 2 ; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{2}{3}$; д) 1.

Тест-15. Тригонометрия.

1. 480^0 тук бурчту радиандык чен менен туюнткула.
а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{8\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{18}$.

2. $\frac{5\pi}{6}$ радиан бурчту градустук чен менен туюнткула.
а) 100^0; б) 120^0 ; в) 75^0; г) 150^0; д) 130^0.

3. $sin\alpha = \frac{4}{5}$ жана $90^0 < \alpha < 180^0$ болсо, анда $cos\alpha$ ны тапкыла.
а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{3}$; д) $-\frac{3}{5}$.

4. $tg\alpha = \frac{3}{4}$ жана $180^0 < \alpha < 270^0$ болсо, $sin\alpha$ ны тапкыла.
а) $-\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{5}$; д) $-\frac{4}{5}$.

5. $(1 - cos\alpha)(1 + cos\alpha) = ?$
а) $cos^2\alpha$; б) $tg\alpha$; в) $sin^2\alpha$; г) $cos\alpha$; д) $sin\alpha$.

6. Эсептегиле: $sin750^0 + cos1140^0 = ?$
а) 2; б) 1 ; в) 3; г) -1; д) $\frac{1}{2}$.

7. $cos\alpha = \frac{3}{5}$ болсо, $sin2\alpha$ ны тапкыла. $(0 < \alpha < 90^0)$
а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{9}{25}$; г) $\frac{18}{25}$; д) $\frac{1}{2}$.

8. Эсептегиле: $\frac{1}{sin^2 x} - \frac{1}{tg^2 x} = ?$
а) -1; б) 2 ; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{5}$; д) 1.

9. *Эсептегиле:* $7\sin 120^0 \cdot tg300^0 = ?$

а) 7; *б)* 5; *в)* $\frac{2}{3}$; *г)* $-\frac{21}{2}$; *д)* -7.

10. *Жөнөкөйлөткүлө:* $ctg\alpha - tg\alpha = ?$

а) $tg\alpha$; *б)* $\cos^2\alpha$; *в)* $2ctg2\alpha$; *г)* $2tg^2\alpha$; *д)* $\sin\alpha$.

12. *Жөнөкөйлөткүлө:* $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = ?$

а) 75^0; *б)* 50^0; *в)* 60^0; *г)* 25^0; *д)* 30^0.

13. *Эсептегиле:* $arctg1 - \arcsin\frac{1}{2} + arctg\sqrt{3} = ?$

а) 60^0; *б)* 30^0; *в)* 45^0; *г)* 100^0; *д)* 75^0.

14. *Теңдемелерди чыгаргыла:* $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;

а) πk; *б)* $\frac{\pi}{12} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}$; *в)* $\frac{\pi k}{3}$;

г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; *д)* $\frac{\pi}{3} + \pi k$.

15. *Теңдемени чыгаргыла:* $tgx - 2ctgx + 1 = 0$;

а) πn; *б)* $\frac{\pi}{3} + \pi n$; *в)* $\frac{\pi}{6} + \pi n$;

г) $\frac{\pi}{4} + \pi n, arctg(-2) + \pi n$; *д)* $\emptyset$.

16. *Теңдемени чыгаргыла:* $4\cos x = 4 - \sin^2 x$;

а) $2\pi n$; *б)* $\frac{\pi}{2} + \pi n$; *в)* $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$;

г) πn; *д)* $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

Тест-16. Функциялар.

1. *Функциянын аныкталуу областын тапкыла.*

$$y = 2x^2 + 5x - 3;$$

а) $x \in N$; *б)* $x \in Z$; *в)* $x \in R$; *г)* $x \in (0; +\infty)$; *д)* $\emptyset$.

2. $y = \frac{3x^2-5}{x-3}$; $D(y) = ?$

а) $x \in (0; 3)$; *б)* $x \in (-1; 5]$; *в)* $\emptyset$; *г)* $x \in (-\infty; 3]$;

д) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. $y = \frac{10}{2x-7}$; $D(y) = ?$
а) $x \in (-\infty; 5)$; *б)* $x \in (-\infty; 3{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$; *в)* $x \in [1; 2]$; *г)* $x \in (-1; 10]$; *д)* $\emptyset$.

4. $y = \sqrt{x^2 - 4}$; $D(y) = ?$
а) $x \in (0; 4]$; *б)* $x \in [2; 4)$; *в)* $x \in [-2; 2]$;
г) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ *д)* $x \in (-2; +\infty)$.

5. $y = \sqrt{9 - x^2}$; $D(y) = ?$
а) $x \in (-3; 3)$; *б)* $x \in [-3; 5)$; *в)* $x \in [-3; 3]$;
г) $x \in (5; 3]$ *д)* $x \in (-3; 4]$.

6. $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$; $D(y) = ?$
а) $x \in (-2; 2)$; *б)* $x \in (-3; 3]$; *в)* $x \in (-1; 1)$;
г) $x \in ([-2; 3)$ *д)* $x \in [-2; 3)$.

7. $y = 2x^2 + 8x + 11$ *параболасынын чокусунун координаталарын тапкыла:*
а) $(1; 2)$; *б)* $(-2; 5)$; *в)* $(2; 3)$; *г)* $(0{,}5)$; *д)* $(-2; 3)$.

8. $y = -x^2 + x + 2$ *функциясынын графиги Ох огу менен канча жолу кесилишет?*
а) 3 жолу; б) 2 жолу; в) 1 жолу; г) кесилишпейт;
д) белгисиз.

9. $y = 3x^2 - 5x + 3$ *функциясынын графигинин Оу огу менен кесилишкен чекитти тапкыла.*
а) $(1; 1)$; *б)* $(2; -1)$; *в)* $(0{,}1)$; *г)* $(0; 3)$; *д)* $(0; 4)$.

10. $y = -x + 1$ *түзү жана* $y = x^2 - 4x + 3$ *параболасынын кесилишүү чекиттерин тапкыла.*
а) $(1; 2)$ *жана* $(0; 1)$; *б)* $(2; -1)$ *жана* $(1; 0)$;
в) $(3; -1)$ *жана* $(2; 0)$; *г)* $(4; 2)$ *жана* $(-1; 0)$.

11. $x = 2$ *саны* $y = x^2 + bx - 8$ *функциясынын нөлү болсо,* b *параметрин тапкыла.*
а) 1; б) 3 ; в) – 2 ; г) 2; д) 4 .

Тест – 17. Функциянын туундусу.

1 – 7. Функциялардын туундусун тапкыла.

1. $f(x) = x^2 + 3x + 5;$

а) $2x + 3;$ *б)* $x + 3;$ *в)* $2x + 5;$ *г)* $3x + 5;$ *д)* $x^2 + 5.$

2. $f(x) = x^4 + 2x^3$

а) $4x^3 + 3x^2$; *б)* $2x^3 - 6x;$ *в)* $4x^3 + 6x^2;$ *г)* $x^3 - 2x^2;$

д) $4x^2 + 6.$

3. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$

а) $6x - \frac{2}{x}$; *б)* $6x + x^2;$ *в)* $3x - \frac{1}{x^2}$; *г)* $6x - 2x^2$; *д)* $\frac{6x^3-1}{x^2}.$

4. $f(x) = \sqrt{x} \cdot sinx$

а) $\sqrt{x} \cdot cosx;$ *б)* $\frac{1}{\sqrt{x}}cosx;$ *в)* $\frac{1}{2\sqrt{x}}cosx + sinx;$

г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}sinx + \sqrt{x}cosx$; *д)* $\sqrt{x}sinx + \frac{1}{\sqrt{x}}cosx.$

5. $f(x) = \frac{x^2}{cosx}$

а) $2x \cdot sinx;$ *б)* $\frac{2xcosx - x^2 sinx}{cos^2x};$ *в)* $\frac{2x \cdot cosx - sinv}{cosx};$

г) $2xcosxsinx;$ *д)* $2x^2 \cdot cos^2x$.

6. $f(x) = sin2x \cdot cos2x$

а) $sin3x;$ *б)* $cos4x;$ *в)* $cos2x \cdot sinx;$ *г)* $sin8x;$ *д)* $6sin4x.$

7. $f(x) = cos^2x - sin^2x$

а) $sin3x;$ *б)* $cos^2x;$ *в)* $cosx \cdot sinx;$ *г)* $2sin2x;$ *д)* $- sin4x.$

Тест – 18. Интеграл.

1 – 12. Интегралды эсептегиле.

1. $\int_5^{10} dx = ?$

а) 5; *б) 2;* *в) 7;* *г) 4 ;* *д) 10.*

2. $\int_{2}^{6} 5dx = ?$

а) 7 ; б) 12; в) 20; г) 8; д) 15.

3. $\int_{-1}^{5} 2xdx = ?$

а) 20; б) 24 ; в) 18; г)30; д) 25.

4. $\int_{-1}^{2} 6x^2dx = ?$

а) 12 ; б) 8 ; в) 10 ; г) 20; д) 18.

5. $\int_{0}^{1} \sqrt[5]{x^3}\,dx = ?$

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{9}{10}$; г) $\frac{5}{8}$; д) $\frac{4}{7}$.

6. $\int_{-1}^{2} (3x^2 + 2x)dx = ?$

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{9}{10}$; г) $\frac{5}{8}$; д) $\frac{4}{7}$.

7. $\int_{0}^{1} (4x^3 - 2x + 1)dx = ?$

а) 2; б) 5; в) 1; г) 0 ; д) -1.

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin3xdx = ?$

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; г) 1 ; д) $\frac{1}{3}$.

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{cos^2 2x}dx = ?$

а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) 3.

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} cos4xdx = ?$

а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1 ; г) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$; д) 0.

11. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xdx = ?$

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) π ; д) $\frac{\pi}{4}$.

12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2xdx = ?$

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) π; д) $-\frac{\pi}{2}$.

Тест-19. Корсоткучтүү жана логарифмалык функция.

1-6. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

1. $y = 2(3^x + 1)$;

а) $x \in (0; +\infty)$; б) $x \in N$; в) $x \in Z$; г) $x \in (-\infty; 0]$; д) $x \in R$.

2. $y = 7^{\sqrt{x}}$;

а) $x \in N$; б) $x \in [0; +\infty)$; в) $x \in R$; г) $x \in Q$; д) $x \in Z$.

3. $y = \sqrt{\frac{1-3^x}{5^{-x}-5}}$;

а) $x \in (0; +\infty)$; б) $x \in N$; в) $x \in R$; г) $x \in (-\infty; -1)$;
д) $x \in (-\infty; 3)$;

4. $y = log_5(4x - 3)$;

а) $x \in (\frac{3}{4}; +\infty)$; б) $x \in R$; в) $x \in N$; г) $x \in Q$; д) $x \in Z$.

5. $y = log_3 \frac{5x+2}{7-3x}$;

а) $x \in R$; б) $x \in (0; 5)$; в) $x \in Z$; г) $x \in N$; д) $x \in \left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{3}\right)$.

6. $y = log_2(4 - x^2)$;

а) $x \in N$; б) $x \in (-2; 2)$; в) $x \in R$; г) $x \in Z$; д) $x \in (0; +\infty)$.

Тест-20. Корсоткучтүү теңдемелер жана барабарсыздыктар.

1-6. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаргыла.

1. $3^{2x} = 9^{2x-3}$;

а) 1; б) 5; в) 3; г) 2; д) −3.

2. $2^{3x} \cdot 2^{3y} = 64$ болсо, $x + y = ?$

а) 2; б) 5; в) 1; г) 3; д) 10.

3. $2^{4x-1} = 2^{4-x}$;

а) 3 ; *б)* 5 ; *в)* -1 ; *г)* 1 ; *д)* 2.

4. $3 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x} = 63$;

а) 5 ; *б)* 2 ; *в)* -1 ; *г)* 4 ; *д)* -10.

5. $4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$;

а) $\{3; 1\}$; *б)* $\{-2; 2\}$; *в)* $\{2; 3\}$; *г)* $\{1; -1\}$; *д)* $\{2; 0\}$.

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{7-3x}$;

а) 5 ; *б)* 2 ; *в)* 0 ; *г)* -3 ; *д)* 3.

7-10. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаргыла.

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geq 16$;

а) $3 \leq x$; *б)* $2 > x$; *в)* $-4 \geq x$; *г)* $5 < x$; *д)* $0 \geq x$.

8. $0{,}5^{2x+1} > 0{,}25$;

а) $x < \frac{1}{2}$; *б)* $x > 1$; *в)* $x > \frac{1}{3}$; *г)* $x < \frac{1}{4}$; *д)* $x > 0$.

9. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$;

а) $x \in (0; +\infty)$; *б)* $x \in (-\infty; 3)$; *в)* $x \in (2; 10)$;
г) $x \in [-1; +\infty)$; *д)* $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

10. $10 \cdot 3^{x} - 3^{2+x} < 27$;

а) $x > 5$; *б)* $x < 3$; *в)* $x \leq -3$; *г)* $x > 10$; *д)* $x < 2$.

Тест-21. Логарифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар.

1-6. Логарифмалык теңдемелерди чыгаргыла.

1. $log_2(3x - 1) = 3$; $x = ?$

а) 5 ; *б)* 2 ; *в)* -3 ; *г)* 3 ; *д)* 4.

2. $log_2 x = 3log_4 3 - log_4 3$; $x = ?$

а) 3 ; *б)* 5 ; *в)* -2 ; *г)* 4 ; *д)* 2.

3. $lg(x^2+2x-1)=lg2$;

а) $\{1;2\}$; *б)* $\{2;1\}$; *в)* $\{-3;1\}$; *г)* $\{4;2\}$; *д)* $\{-1;3\}$.

4. $log_3(x^2+2x-5)-log_3(x+1)=0$

а) $\{2;5\}$; *б)* $\{-2;3\}$; *в)* 7 ; *г)* -3; *д)* $\{1;2\}$.

5. $log^2{}_5\,x-6log_5 x=-5$;

а) $\{5;5^5\}$; *б)* $\{5;3\}$; *в)* $\{-1;2\}$; *г)* $\{3;5\}$; *д)* $\{-2;1\}$.

6. $log_3(log_2(log_5 x))=0$. $x=?$

а) 10 ; *б)* 2 ; *в)* 5 ; *г)* 4 ; *д)* 25.

7-10. Логарифмалык барабарсыздыктар.

7. $log_2(3x-8)>2$;

а) $x>2$; *б)* $x<3$; *в)* $x>4$; *г)* $x>5$; *д)* $x<8$.

8. $log_{\frac{1}{7}}(4x+1)<-2$;

а) $x<3$; *б)* $x>5$; *в)* $x>6$; *г)* $x>12$; *д)* $x<18$.

9. $log_{0,3}(2x-4)>log_{0,3}(x+1)$;

а) $x>5$; *б)* $2<x<5$; *в)* $x<10$; *г)* $x>-3$; *д)* $x>-3$.

10. $lgx+lg(x-1)<lg6$;

а) $x<3$; *б)* $x>1$; *в)* $2<x<3$; *г)* $x>5$; *д)* $1<x<3$.

Тест-22. Салыштыруу эсептери.

Көрсөтмө:

Берилген А жана Б тилкелеринде чоңдуктар жазылган. Ал чоңдуктарды салыштыргыла.

-А тилкесиндеги чоңдук чоң болсо, А) вариантын тандагыла;

-Б тилкесиндеги чоңдук чоң болсо, Б) вариантын тандагыла;

-Чоңдуктар барабар болсо, В) вариантын тандагыла;

-Берилген маалымат чоңдуктарды салыштырууга жетишсиз болсо, Г) вариантын тандагыла.

Тест-22

А тилкеси	*Б тилкеси*	*А тилкеси*	*Б тилкеси*
1. $860 \cdot (7+3)$	$860 \cdot (9-3)$	*7.* $\frac{30}{2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\frac{75}{3 \cdot 4 \cdot 5}$
2. 2^6	3^4	*8.* $2+\frac{1}{3}$	$2 : \frac{1}{3}$
3. $0{,}5 \cdot 640$	$0{,}1 \cdot 640$	*9.* $\frac{5 \cdot (-10)^2}{0{,}01}$	$\frac{7 \cdot (-10)^3}{0{,}001}$
4. $75 : 5 \cdot 3$	$75 \cdot 5 : 3$	*10.* $0{,}3^3$	$0{,}2^5$
5. $\frac{8}{45}$	$\frac{9}{46}$	*11.* $\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^4$
6. $0{,}01 \cdot 17$	$17 \cdot 10^{-2}$	*12.* $\left(\frac{7}{5}\right)^3$	$\left(-\frac{7}{5}\right)^5$

Тест-23

А тилкеси	*Б тилкеси*	*А тилкеси*	*Б тилкеси*
1-5. $a+b=5,\ b-a=-1,\ a,b \in Z$		*6.* a^{-1}	b^{-1}
1. a	b	*7.* $(2a-b)^3$	$(a \cdot b)^4$
2. ab^2	a^2b	*8.* a^2	$(-b)^3$
3. a^3	b^4	*9.* $(a-b)^3$	$(a+b)^2$
4. $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	*10.* $(2a-1)^2$	b^2+8
5. $\frac{b+1}{a}$	$\frac{a+1}{b}$	*11.* $\left(\frac{3}{b}\right)^3$	a^2
6-12. $2a-b=3,\ a \cdot b=2,\ a,b \in N$		*12.* $2a$	$b+4$

Тест-24

А тилкеси	*Б тилкеси*	*А тилкеси*	*Б тилкеси*
1. $0{,}2 \cdot 3$	$\frac{1}{5} \cdot 3$	*7.* $\left(\frac{1}{10}\right)^3$	$(0{,}1)^4$

2. ЭЧЖБ (60; 40)	ЭЧЖБ (8; 6)	8. $(0,1)^3\cdot 10^3$	$\left(\frac{1}{10}\right)^5\cdot 10^5$
3. $\frac{(0,1)^{-2}}{10^5}$	$\frac{7}{(0,1)^{-6}}$	9. $7\cdot 11^{-1}$	$2\cdot 11^{-1}+3\cdot 11^{-1}+$ $+4\cdot 11^{-1}$
4. $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}:\frac{1}{7}$	10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	27
5. $0,5\cdot 10^{-7}$	$\frac{0,5}{10^7}$	11. $\sqrt[4]{27\cdot 48}$	$\sqrt[3]{25\cdot 40}$
6. $\left(\frac{1}{3}-1\right)^3$	$\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$	12. $\frac{5!\cdot 7!}{6!\cdot 5!}$	$\frac{5!\cdot 6!}{3!\cdot 7!}$

Тест-25

А тилкеси	*Б тилкеси*	*А тилкеси*	*Б тилкеси*
1-6. $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$		*7-12.* $a>1,\ a\in N$	
1. a^5	b^7	7. a^2	a^4
2. $(a+b)\cdot d$	$(b+d)\cdot a$	8. $\frac{a+5}{a+6}$	$\frac{a-1}{a+6}$
3. $\frac{a\cdot b}{d}$	$\frac{b+d}{c}$	9. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$	a^3
4. $(b\cdot c)^3$	$(a\cdot d)^2$	10. $(-1)^5\cdot a$	$(-1)^3\cdot a$
5. $\frac{a+c}{d}$	$\frac{b+d}{d}$	11. $(1-a)^3$	$(1+a)^2$
6. $a+7$	$d-7$	12. a	27

Тест-26

А тилкеси	*Б тилкеси*	*А тилкеси*	*Б тилкеси*
1-4. $c>c^2>c^3$		6. $f(-3)$	$g(-5)$
1. c^3	1	7. $\frac{g(5)}{f(1)}$	$f(2)\cdot g(3)$
2. 1	c^2	8. $f(9)-g(4)$	$f(2)+g(1)$
3. c^5	c^4	9. ЭЧЖБ (8; 11)	ЭЧЖБ (9; 8)
4. $\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c^3}$	10. $4!-3!$	$5!:4!$

5-12. $f(x) = 2x + 1,$ $g(x) = x^2 - 1$		*11.* $\sqrt{\frac{5}{7}} + \sqrt{\frac{7}{5}}$	$\frac{12}{\sqrt{35}}$
5. $f(5)$	$g(3)$	*12.* $\frac{3^7+3^7+3^7}{3^6+3^5+3^6}$	$\frac{7^{40} - 7^{39}}{7^{40}}$

Тест – 1. Чыгарылыштар жана жооптор.
Сандар менен болгон амалдар.

1. Чыгаруу: Амалдарды аткаруу тартибин эске алуу менен эсептөө жүргүзөбүз.

$48365 + (3864 + 7992): 26 - 32964 = 48365 + 1856: 26 -$
$-32964 = 48365 + 456 - 32964 = 15857$. *Жообу: (г).*

2. Чыгаруу: Санды даражага көтөрүү эрежесин пайдаланабыз.

$7^2 + 10^2 - 2^6 = 49 + 100 - 64 = 85$ *Жообу: (в)*

3. Чыгаруу:

$6^3: 3^3 + 5^2 \cdot (2^3 + 5^3) = 216: 27 + 25 \cdot (8 + 125) =$
$= 8 + 25 \cdot 133 = 8 + 3325 = 3333$ *Жообу: (д)*

4. Жообу: 97 (а)

5. Чыгаруу: a *га удаалаш сан* $a + 1$, $a + 1$ *ге удаалаш сан* $a + 2$, $a + 2$ *ге удаалаш сан* $a + 3$ *болот.*

Демек $\frac{a+d}{b+c} = \frac{a+a+3}{a+1+a+2} = \frac{2a+3}{2a+3} = 1$ *Жообу: (в)*

6. Чыгаруу: $11^7 + 5^6$ *суммасы жуп сан болот, анткени* 11^7 *– так сан,* 5^6 *– так сан. Эки так сандын сумммасы жуп сан болот. Жообу: (в)*

7. Чыгаруу: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b +$
$+10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c =$
$=111(a + b + c)$.

Демек, $111(a + b + c) = 666$, $a + b + c = 6$ *Жообу: (г)*

8. Чыгаруу: Цифраларынын суммасы 3 кө бөлүнгөн сан 3 кө бөлүнөт.

Ар кандай сандын акыркы эки цифрасынан түзүлгөн сан 4 кө бөлүнсө, анда ал сан 4 кө бөлүнөт.

Берилген сандарды ушул белгилер боюнча текшеребиз.

Мындай сан 2352 2+3+5+2=12 3 кө бөлүнөт, 52 4 кө бөлүнөт демек 2352 бир эле учурда 3 кө да 4 кө да бөлүнөт. Жообу: (в)

9. Жообу: (б) $5n+2$

10. Чыгаруу: Сан 15 ке бөлүнүш үчүн бир эле учурда 3 кө да 5 ке да бөлүнүш керек.
Андай сан берилген сандардын ичинен 2130. Жообу: (г)

11. Чыгаруу: $12 = 2^2 \cdot 3, 18 = 2 \cdot 3^2$

12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

Демек, $ЭКЖБ(12;18) = 2^2 \cdot 3^2 =$
$= 4 \cdot 9 = 36$ *Жообу: (в)*

12. Чыгаруу:

56	2	72	2
28	2	36	2
14	2	18	2
7	7	9	3
1		3	3
		1	

$56 = 2^3 \cdot 7, 72 = 2^3 \cdot 3^2$
Демек, $ЭЧЖБ(56,72) = 2^3 = 8$

13. Чыгаруу: 560 ты 432 ге бөлөбүз.

$$\begin{array}{r|l} 560 & 432 \\ -432 & 1 \\ \hline 128 & \end{array}$$

Эми 432ни 128ге бөлөбүз.

$$\begin{array}{r|l} 432 & 128 \\ -384 & 3 \\ \hline 048 & \end{array}$$

Эми 128ди 48ге бөлөбүз.

$$\begin{array}{r|l} 128 & 48 \\ -96 & 2 \\ \hline 032 & \end{array}$$

48ди 32ге бөлөбүз.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 32 \\ -32 & 1 \\ \hline 16 & \end{array}$$

32ни 16га бөлөбүз.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 16 \\ -32 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

демек, нөлдөн айырмалуу акыркы калдык 16.
ЭЧЖБ(560,432)=16 болот. Жообу: (а)

14. Чыгаруу:

40	2	50	2	60	2
20	2	25	5	30	2
10	2	5	5	15	3
5	5	1		5	5
1				1	

$$40 = 2^3 \cdot 5,\quad 50 = 2 \cdot 5^2,\quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

ЭКЖБ(40,50,60)$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 3 \cdot 25 = 600$. *Жообу: (б)*

15. Чыгаруу:

$$\begin{array}{r|l} abc7 & abc \\ \underline{abc} & 10 \\ 0007 & \end{array}$$

бөлүүнү аткардык.

Демек, толук эмес тийинди 10, калдык 7 болот, алардын суммасы 10+7=17. Жообу: (б)

16. Чыгаруу:

18	2	24	2	20	2	30	2
9	3	12	2	10	2	15	3
3	3	6	2	5	5	5	5
1		3	3	1		1	
		1					

$$18 = 2 \cdot 3^2,\quad 24 = 2^3 \cdot 3,\quad 20 = 2^2 \cdot 5,\quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

ЭКЖБ (18,24) – ЭЧЖБ(20,30) = $2^3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 5 = 72 - 10 = 62$

Жообу: (а)

17. Чыгаруу: 2+3=5, 2+5=7, 2+41=43 бирок бул жооптор мисалда берилген сандардын арасында жок. Ал сандар 2 жана 11 жөнөкөй сандары.

2+11=13 Жообу: (в).

18.Чыгаруу:

1575	3	1890	2
525	3	945	3
175	5	315	3
35	5	105	3
7	7	35	5
1		7	7
		1	

$$1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7\,,\ \ 1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$1575\text{x}1890 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ *бул көбөйтүндү 2ге, 3кө, 5ке жана 7ге бөлүнөт. 8ге бөлүнбөйт. Жообу: (д).*

19. Чыгаруу: $\overline{237x}$ *саны 15 ке калдыксыз бөлүнүш үчүн бир эле учурда 3кө жана 5ке калдыксыз бөлүнүшү зарыл. 5ке бөлүнүүчү сан 0 жана 5 цифрасы менен аяктайт. Бул цифраларды* x *тин ордуна коюп көрөбүз 2370, бул сандын цифраларынын суммасы 2+3+7+0=12. 12 саны 3кө өлүнөт. Демек, 2370 саны 15ке калдыксыз бөлүнөт.*

Жообу: x *тин ордуна 0 коюлат. (д)*

20. Чыгаруу: $a^2 - b^2 = 11\,,$

$(a-b)(a+b) = 11\,,$ *11 жөнөкөй сан болгондуктан* $a-b=1,\ a+b=11$ *деп алсак болот. Бул шарттын негизинде төмөнкүдөй теңдемелер системасын алабыз:*

$\begin{cases} a-b=1, \\ a+b=11, \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын кошуу жолу*

$2a = 12,$ *менен чыгарабыз.*

$a = 6.$

$a+b=11\,,\ \ b = 11-a,\ \ \ b = 11-6 = 5.$

Демек, $a=6,\ b=5.$

$a \cdot b = 6 \cdot 5 = 30.$ *Жообу: (б).*

Тест – 2.

Бүтүн сандар менен болгон амалдар.

1. Чыгаруу: -4-6+12+(-5)= -15+12=-3. Жообу: (б)

2. Чыгаруу: 10-7-12+21-12+18=10+21+18+(-7-12-12)=
=49-31=18. Жообу: (б)

3. Чыгаруу: -(-3-5)+(-7+10)-(6-8)=8+3+2=13 Жообу: (д)

4. Чыгаруу: $[4^3 : 16 + 3^3 : 9 \cdot (-1)] + [2^4 - (3^2 \cdot 10) : 6]^{540} =$

$= \left(64:16 + 27:9 \cdot (-1)\right) + [2^4 - (9 \cdot 10) : 6]^{540} = 1 + 1^{540} = 2$

Жообу: (в)

5. *Чыгаруу:* $-15 — 22 + (-18) - [30 — 8) =$

$=-15 + 22 - 18 - 30 - 8 = -49.$ *Жообу: (г)*

6. *Чыгаруу:* $-315: 45 + (-12) \cdot (-10) + 27: (-3) =$
$=-7 + 120 - 9 = 120 - 16 = 104$

7. *Чыгаруу:* $-(x - y + 5) + (-x - y + 5) =$

$=-x + y - 5 - x - y + 5 = -2x$ *Жообу: (а)*

8. *Чыгаруу:* $-3(24x - 12y) + 5(-14x + 26y) =$

$=-72x + 36y - 70x + 130y = -142x + 166y$ *Жообу: (д)*

9. *Чыгаруу:* $x \cdot y$ *көбөйтүндүсү ар дайым терс болот. калгандары айрым учурда аткарылганы менен көбүнчө аткарылбайт.* *Жообу: (г)*

10. *Чыгаруу:* a, b, c *сандарынын эң кичине натуралдык маанилери 1 ге барабар.*
$3a + 5b + 2c = 42$ *теңдемесинде* $b = 2, c = 1$ *болсун, анда*
$3a + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 42$ *теңдемесин алабыз.*
$3a + 12 = 42$
$3a = 30$
$a = 10$ *демек* a *нын эң чоң натуралдык мааниси 10 го барабар.*
Жообу: (б)
11. *Чыгаруу: Жообу: г)* $3 > (-30)$;
12. $\frac{(-1)^5 \cdot (-1)^6 \cdot (-1)^7 \cdot (-1)^8}{(-1)^3 : (-1)^4 : (-1)^5 \cdot (-1)^6} = \frac{-1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1}{-1 : 1 : (-1) \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$ *Жообу: (в)*

Тест -3. Болчоктор менен болгон амалдар.

1. *Жообу: в)* $\frac{21}{36} < \frac{22}{36}$
2. *Жообу: в)* $\frac{7}{10}, \frac{5}{12}$;
3. *Чыгаруу:* $2\,\overset{9}{\frac{3}{4}} + \overset{6}{\frac{5}{6}} - 1\,\overset{3}{\frac{7}{12}} + \overset{4}{\frac{4}{9}} - 1\,\overset{3}{\frac{1}{12}} + 3\,\overset{6}{\frac{1}{6}} =$

$= 3\,\frac{27+30-21+16-3+6}{36} = 3\,\frac{55}{56} = 4\,\frac{19}{36}$; *Жообу: д)*

4. *Чыгаруу:* $17+10:\left(14\frac{6}{25}-11\frac{37}{50}\right)-15=2+10:2\frac{1}{2}=2+$
$+10\cdot\frac{2}{5}=2+4=6$ *Жообу: а)*

5. *Чыгаруу:* $\left(2\frac{1}{4}\cdot3-5\frac{1}{8}:1\frac{9}{32}\right):2\frac{1}{5}-1\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{11}+4\frac{4}{5}=\left(\frac{9}{4}\cdot3-\frac{41}{8}\cdot\right.$
$\left.\frac{32}{41}\right):\frac{11}{5}-\frac{11}{9}\cdot\frac{3}{11}+4\frac{4}{5}=\left(\frac{27}{4}-4\right)\cdot\frac{5}{11}-\frac{1}{3}+4\frac{4}{5}=\frac{11}{4}\cdot\frac{5}{11}+4\frac{17}{15}==$
$\frac{5}{4}+4\frac{17}{15}=\frac{5}{4}+4\frac{7}{15}=1\frac{1}{4}+4\frac{7}{15}=5\frac{15+28}{60}=5\frac{43}{60}$ *Жообу: г)*

6. *Чыгаруу:* $3:\frac{3}{3-\frac{2}{3-\frac{1}{3}}}=3:\frac{3}{3-\frac{2}{\frac{8}{3}}}=3:\frac{3}{3-\frac{3}{4}}=3:\frac{3}{\frac{9}{4}}=3:\frac{4}{3}=3\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

Жообу: а)

7. *Чыгаруу:* $\frac{\left(3+\frac{2}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(4-\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{3}{4}\right)}=\frac{\frac{11}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{15}{4}+\frac{5}{4}}=\frac{\frac{9}{3}}{\frac{20}{4}}=\frac{3}{5}$ *Жообу:* $\frac{3}{5}$ *д)*

8. *Чыгаруу: Калай менен жез куйманын* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ *бөлүгүн түзөт. Анда темир* $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ *бөлүгүн түзөт. Жообу: б)*

9. *Чыгаруу:* $(1\frac{1}{2})^3+(2\frac{1}{2})^2-\frac{17}{2}=(\frac{3}{2})^3+(\frac{5}{2})^2-\frac{17}{2}=$
$=\frac{27}{8}+\frac{25}{4}-\frac{17}{2}=\frac{27+50-68}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ *Жообу: б)*

10. *Чыгаруу:* $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{38}\right)\left(1-\frac{1}{39}\right)\left(1-\right.$
$\left.-\frac{1}{40}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{37}{38}\cdot\frac{38}{39}\cdot\frac{39}{40}=\frac{1}{40}$ *Жообу: в)*

11. *Чыгаруу: Адегенде туюнтманы жөнөкөйлөтүп алып,* a *га ар түрдүү сан маанилерин берип текшерип көрөбүз.*
$\frac{5+a}{a+1}+\frac{a-1}{a+1}=\frac{5+a+a-1}{a+1}=\frac{2a+4}{a+1}$

$a=1$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot1+4}{2+1}=\frac{6}{3}=2$ *демек, бүтүн маанини алды;*

$a=-1$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot(-1)+4}{-1+1}=\frac{-2+4}{0}$ *туюнтма мааниге ээ болбойт;*

$a=0$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot0+4}{0+1}=\frac{4}{1}=4$ *бүтүн маани;*

$a=2$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot2+4}{2+1}=\frac{8}{3}$ *бүтүн болбоду;*

$a=-2$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot(-2)+4}{-2+1}=\frac{0}{-1}=0$ *бүтүн маани;*

$a=3$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot3+4}{3+1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ *бүтүн болбоду;*

$a=-3$ *болсун, анда* $\frac{2\cdot(-3)+4}{-3+1}=\frac{-2}{-2}=1$ *бүтүн маани.*

Демек, берилген туюнтма a нын $\{-3,-2,0,1\}$ *маанилеринде бүтүн маанилерди алат. Жообу: а)*

12. Чыгаруу: Берилген бөлчөктөрдү бирдей бөлүмгө келтирип алабыз: $\frac{1\cdot7}{8\cdot7}=\frac{7}{56},\frac{1\cdot8}{7\cdot8}=\frac{8}{56}$

$\frac{7}{56}$ *жана* $\frac{8}{56}$ *бөлчөктөрүнүн арасына да сан жайгаштыра албайбыз. Эми бул бөлчөктөрдүн алымын, бөлүмүн 2 ге көбөйтүп көрөлү.*
$\frac{7\cdot2}{56\cdot2}=\frac{14}{112},\frac{8\cdot2}{112}=\frac{16}{112};\frac{14}{112}$ *жана* $\frac{16}{112}$ *сандарынын арасына* $\frac{15}{112}$ *санын жайгаштырууга болот. Жообу: д)*

Тест-4. Ондук бөлчөктөр.

1. Чыгаруу: $(1{,}32+2{,}54)(2{,}75-1{,}05)=3{,}86\cdot2{,}7=10{,}422.$

Жообу: (а)

2. Чыгаруу: $0{,}125\cdot16+28:0{,}56+7{,}5-0{,}12\cdot7=$
$=2+50+7{,}5-0{,}84=52-6{,}66=45{,}34.$

Жообу: (г).

3. Чыгаруу: $(1{,}87+1{,}955):0{,}85-(2\cdot1{,}75-3{,}5)\cdot4{,}62=$
$=3{,}825:0{,}85-(3{,}5-3{,}5)\cdot4{,}62=$
$=4{,}5-0\cdot4{,}62=4{,}5-0=4{,}5;$

Жообу: (д).

4. Чыгаруу: $875\cdot0{,}01+0{,}175\cdot10^2=8{,}75+0{,}175\cdot100=$
$=8{,}75+17{,}5=26{,}25$ *Жообу: (б)*

5. Чыгаруу:
$2{,}5\cdot10^6+0{,}14\cdot10^8-[300\cdot10^4-(25000\cdot10^2)]=$
$=2{,}5\cdot10^6++14\cdot10^6-(3\cdot10^6-2{,}5\cdot10^6)=$
$=16{,}5\cdot10^6-0{,}5\cdot10^6=16\cdot10^6$ *Жообу: (б)*

6. Чыгаруу: $\frac{0{,}001}{0{,}0001}+\frac{0{,}24}{0{,}012}+\frac{2{,}24}{0{,}16}=10+20+14=44$

Жообу: (в)

7. Чыгаруу: $a=4{,}5,\ b=2{,}6.$
$3{,}4a+2{,}7b-0{,}4a+1{,}3b=3a+4b=3\cdot4{,}5+4\cdot2{,}6=$
$=13{,}5+10{,}4=23{,}9;$ *Жообу: (а)*

8. Чыгаруу: $m = 0{,}77 + 1{,}41 = 2{,}18,$

$$n = 4{,}608 : 1{,}8 = 2{,}56,$$

$$2{,}18 < 2{,}56$$

Демек, $m < n$. *Жообу: (г)*

9. Чыгаруу: $\frac{0{,}027:0{,}3}{0{,}0081:0{,}9} - \frac{0{,}0256:2}{0{,}1024:4} = \frac{0{,}09}{0{,}009} - \frac{0{,}0128}{0{,}0256} = 10 - 0{,}5 = 9{,}5$

Жообу: (в)

10. Чыгаруу: Адегенде метр аркылуу туюнтуп алабыз. $150\text{мм} + 24\text{дм} + 6310\text{см} - 245\text{мм} = 0{,}15\text{м} + 2{,}4\text{м} + 63{,}1\text{м} - {-0{,}245\text{м}} = 65{,}405 \approx 65\text{м}$ *Жообу: (б)*

11. Чыгаруу: $\frac{1{,}4^2 - 0{,}6^2}{2{,}4\cdot 1{,}6 - 1{,}6^2} = \frac{(1{,}4-0{,}6)(1{,}4+0{,}6)}{1{,}6(2{,}4-1{,}6)} = \frac{0{,}8\cdot 2}{1{,}6\cdot 0{,}8} = \frac{2}{1{,}6} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

Жообу: (г)

12. Чыгаруу: Адегенде $\frac{14}{25}$ жана $\frac{9}{12}$ *жөнөкөй бөлчөктөрүн ондук бөлчөкө айландырып алабыз:*

$\frac{14}{25} = 0{,}56;\ \ \frac{9}{12} = 0{,}75$

Демек, A=0,56, B=0,75, C=0,59; Эми аларды ондук бөлчөктөрдү салыштыруу эрежеси боюнча салыштырабыз.

$0{,}56 < 0{,}59 < 0{,}75;\ \ A < C < B$ *Жообу: (а).*

Тест-5. Өзгөрүлмөлүү туюнтмалар жана аларды өзгөртүүлөр.

1. Чыгаруу: $a = 5,\ \ b = 3.\ a^2 - 2(10 - b^2) = 5^2 - 2(10 - 3^2) =$

$$= 25 - 2(10 - 9) = 25 - 2 = 23$$

Жообу: (б).

2. Чыгаруу: $5(2a - b + 3) - 2(5a - 3b + 7) =$

$$= 10a - 5b + 15 - 10a + 6b - 14 = b + 1.$$

Жообу: (б).

3. Чыгаруу: $2x^2 + 8x - 4(x^2 + 2x - 2) =$

$$= 2x^2 + 8x - 4x^2 - 8x + 8 = -2x^2 + 8;$$

Жообу: (в).

4. *Чыгаруу:* $A \cdot B = (3x+2)(x-3) = 3x^2 - 9x + 2x - 6 =$
$= 3x^2 - 7x - 6;$ *Жообу: (г)*

5. *Чыгаруу:*
$3x^2y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + xy^2 - 2x^2y^2 + 3x + 2x^2y - xy^2 - y =$
$= 3x^2y^2 - x^2y^2 - 2x^2y^2 - 2x^2y + 2x^2y + xy^2 - xy^2 +$
$+3x - y = 3x - y;$ *Жообу: (в).*

6. *Чыгаруу:* $A = \frac{2x+8}{x-2} = \frac{2\cdot 5+8}{5-2} = \frac{18}{3} = 6$. *Жообу: (д).*

7. *Чыгаруу:* $3a^2 + 1 + \frac{5-15a^2}{5} = \frac{15a^2+5+5-15a^2}{5} = \frac{10}{5} = 2.$
Жообу: (б) .

8. *Чыгаруу:* $\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{x^4} + \frac{27}{8} = \frac{27x^4+8}{8x^4}$
Жообу: (в).

9. *Чыгаруу:* $5a^2b^3c \cdot 3ab^4c^5 = 5a^2b^3c^5;$ *Жообу: (а).*

10. *Чыгаруу:*
$(x-3)(x+3) - (x-4)(x+4) = x^2 - 9 - x^2 + 16 = 7$
Жообу: (г).

Тест – 6. Натурал көрсөткүчтүү даража

1. *Чыгаруу:* $V = a^3$ *демек,* $V = (5\text{см})^3 = 125\text{см}^3$
Жообу: (д).

2. *Чыгаруу: Кубдун грандары квадрат болгондуктан, бир гранынын аянты* $S_1 = (4\text{см})^2 = 16\text{см}^2$. *Анын толук бети*
$S_{т.б.} = 6 \cdot S_1 = 6 \cdot 16\text{см}^2 = 96\text{см}^2$. *Жообу: (в).*

3. *Чыгаруу:*
$(a^3 \cdot a^4 \cdot a^5) : (a \cdot a^2 \cdot a^6) = a^{12} : a^9 = a^3 = 5^3 = 125.$
Жообу: (г).

4. *Чыгаруу:* $\frac{0{,}5^{10}}{(0{,}5\cdot 0{,}5^3)^2} = \frac{0{,}5^{10}}{(0{,}5^4)^2} = \frac{0{,}5^{10}}{0{,}5^8} = 0{,}5^{10-8} = 0{,}5^2 = 0{,}25$
Жообу: (б).

5. *Чыгаруу:* $\frac{(-2abx)^4}{(3abx)^3} = \frac{16(abx)^4}{27(abx)^3} = \frac{16}{27}(abx)^{4-3} = \frac{16abx}{27}$.

Жообу: (а).

6. *Чыгаруу:* $(3^5 - 3^4)(3^3 + 3^2) = 3^8 + 3^7 - 3^7 - 3^6 =$
$= 3^8 - 3^6 = 3^6(3^2 - 1) = 3^6 \cdot 8 = 3^6 \cdot 2^3$,
демек, 2^3 *на бөлүнөт.* *Жообу: (в).*

7. *Чыгаруу:*
$(5^6 + 5^4)(5^2 - 1) = 5^4(5^2 + 1)(5^2 - 1) = 5^4 \cdot 26 \cdot 24$
көбөйтүүчүлөрдүн ичинен 26 саны 13 жөнөкөй санына бөлүнөт. Демек, көбөйтүндү да 13кө бөлүнөт.

Жообу: (г).

8. *Чыгаруу:* $A = (-5{,}1)^7$ *жана* $B = (-2)^4$. *Терс сандын так көрсөткүчтүү даражасы терс сан болот, ал эми жуп көрсөткүчтүү даражасы оң сан болот.*
Демек, $A < B$. *Жообу: (в).*

9. *Чыгаруу:*
$0{,}5 \cdot 3^3 - 0{,}3 \cdot 2^4 = 0{,}5 \cdot 27 - 0{,}3 \cdot 16 = 13{,}5 - 4{,}8 = 8{,}7$.

Жообу: (а).

10. *Чыгаруу:* $[(2x^2y^3)^2]^4 = (2^2 \cdot x^4 \cdot y^6)^4 = 2^8 \cdot x^{16} \cdot y^{24}$

Жообу: (д).

Тест – 7. Бир өзгөрмөсү бар теңдемелер жана эки белгисиздүү теңдемелер системалары.

1. *Чыгаруу:* $5x - 2(x + 1) = 10$,
$5x - 2x - 2 = 10$,
$3x = 12$,
$x = 12:3$,
$x = 4$. *Жообу: (в).*

2. *Чыгаруу:*
$12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$,
$12 - 4x + 18 = 36 + 4x + 18 - 6x$,
$-4x - 4x + 6x = 54 - 30$,
$-2x = 24$,

$x = 24:(-2),$

$x = -12.$ *Жообу: (б).*

3. *Чыгаруу:*

$$2x + \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x,$$
$$2x + \frac{1}{2}x = 3\frac{2}{3} - \frac{1}{3},$$
$$2\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{3},$$
$$x = 3\frac{1}{3} : 2\frac{1}{2} = \frac{10}{3} : \frac{5}{2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{3},$$
$$x = 1\frac{1}{3}.$$

Жообу: (г).

4. *Чыгаруу: Маселенин шарты боюнча төмөнкүдөй теңдеме түзүп алабыз.*

$$4(3x+1) = 8x + 12,$$
$$12x + 4 = 8x + 12,$$
$$12x - 8x = 12 - 4,$$
$$4x = 8,$$
$$x = 2.$$

Жообу: (г).

5. *Чыгаруу: Төмөндөгүдөй теңдеме түзүп алабыз.*

$$5y + 2 = 2y + 5 + 12,$$
$$5y - 2y = 17 - 2;$$
$$3y = 15,$$
$$y = 15:3 = 5.$$

Жообу: (а).

6. *Чыгаруу:* $5{,}6 - 7y = -4(2y - 0{,}9) + 2{,}4;$

$$5{,}6 - 7y = -8y + 3{,}6 + 2{,}4,$$
$$-7y + 8y = 6 - 5{,}6,$$
$$y = 0{,}4.$$

Жообу: (б)

7. *Чыгаруу:* $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын кошуу жолу менен чыгарабыз.*

$$+\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{array}$$

$$3x = 6$$

$x = 2$ *Экинчи теңдемеге* $x = 2$ *маанисин коюп,* y *ти табабыз.* $2 + 3y = 5,$

$$3y = 5 - 2,$$
$$3y = 3, \ y = 1.$$

Демек, $x = 2, \quad y = 1.$ *Жообу: (д).*

8. Чыгаруу:

$$\begin{cases} 2(3x - 2y) + 1 = 7x, \\ 12(x + y) - 15 = 7x + 12y; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 4y + 1 - 7x = 0, \\ 12x + 12y - 7x - 12y = 15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 4y = -1, \\ 5x = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y = 1, \\ x = 3 \end{cases} \quad 3 + 4y = 1, \ \ 4y = -2, \ y = -\frac{1}{2}$$

Демек, $x = 3, \quad y = -\frac{1}{2}.$ *Жообу: (в).*

9 . *Чыгаруу:* $\begin{cases} y - x = 20, \\ 2x - 15y = -1; \end{cases}$ *бул теңдемелер системасын ордуна коюу жолу менен чыгарабыз. 1-теңдемеден у ти х аркылуу туюнтуп алабыз.*

$y = 20 + x,$ *у тин ордуна экинчи теңдемеге коебуз.*

$$2x - 15(20 + x) = -1$$
$$2x - 300 - 15x = -1$$
$$-13x = 299$$
$$x = 299 : (-13)$$
$$x = -23$$

Демек, $x = -23, \ \ y = 20 + (-23) = -3.$ *Жообу: (б).*

10. Чыгаруу:

$$\begin{cases} 2x = 11 - 3y, \\ 6y = 22 - 4x; \end{cases}$$ *х ти у аркылуу туюнтуп алабыз.*

$x = \frac{11-3y}{2};$ *бул маанини 2-теңдемеге коебуз.*

$$6y = 22 - 4 \cdot \frac{11 - 3y}{2}$$
$$6y = 22 - 22 + 6y$$

$6y = 6y,$ *демек, у каалагандай мааниге ээ. Теңдемелер системасы чексиз көп чыгарылышка ээ болот.*

Жообу: *(а).*

Тест-8. Теңдемелердин жана теңдемелер системасынын жардамы менен маселелерди чыгаруу.

1. Чыгаруу: Биринчи жумушчу x тетик даярдасын дейли, анда маселенин шарты боюнча 2-жумушчу x+10 тетик даярдаган болот.

Демек, x+x+10=100 теңдемесин түзө алабыз.

2x=100-10

2x=90

x=45. 1- жумушчу даярдаган тетиктердин саны.

2-жумушчу 45+10=55 тетик даярдаган. Жообу: (в).

2. Чыгаруу: Алгач чарбада x трактор болсун, анда калган тракторлордун саны x-12 болот.

Маселенин шарты боюнча

$1{,}5(x-12)=x$ *теңдемесин түзөбүз.*

$1{,}5x-18=x,$

$1{,}5x-x=18,$

$0{,}5x=18,$

$x=18:0{,}5,$

$x=36.$ *Чарбадагы тракторлордун саны. Калган тракторлордун саны 36-12=24. Жообу: (г).*

3. Чыгаруу: /ч бурчтуктун барабар жактарынын узундуктары x см ден болсун, анда үчүнчү жагы x-4 см болот.

Маселенин шарты боюнча

$x+x+x-4=26,$ *теңдемесин алабыз.*

$3x=26+4,$

$3x=30,$

$x=10,$

үчүнчү жагы 10-4=6 см болот. Жообу: (г).

4. Чыгаруу: эң кичүүсү x жашта болсун, анда 2-уул x+4, 3-уул x+8, 4-уул x+12, 5-уул x+16, 6-уул x+20 жашта болот.

Маселенин шарты боюнча

3x=x+20

3x-x=20

2x=20
x=20:2
x=10. Демек, эң кичүү уул 10 жашта болот. Жообу: (а)

5. Чыгаруу: Ойлонулган сан $\overline{ab}$ *саны болсун, анын оң жагына 0 жазсак* $\overline{ab0}$ *саны пайда болот. Маселенин шарты боюнча* $\overline{ab0} - 208 = 2 \cdot \overline{ab}$ *болот.*

$100a + 10b + 0 - 208 = 2(10a + b)$,
$100a + 10b - 20a - 2b = 208$,
$80a + 8b = 208$ *теңдеменин эки жагын тең сегизге*
$10a + b = 26$ *бөлөбүз.*
$\overline{ab} = 26$. *Демек, ойлонулган сан 26. Жообу: (д).*

6. Чыгаруу: Азыркы күндө атасы х жашта баласы у жашта болсун. Анда ата-баланын 10 жыл мурдагы жаштары х-10 жана у-10 болот, ал эми 22 жылдан кийинки жаштары х+22 жана у+22 болот. Маселенин шарты боюнча төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзөбүз:

$$\begin{cases} x - 10 = 10(y - 10), \\ x + 22 = 2(y + 22), \end{cases} \quad \begin{cases} x - 10 = 10y - 100, \\ x + 22 = 2y + 44, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 10y = -90, \\ x - 2y = 22, \end{cases}$$

Кошуу жолун пайдаланабыз

$$+\begin{array}{l} -x + 10y = 90, \\ x - 2y = 22, \end{array}$$

$$8y = 112,$$
$$y = 112:8,$$
$$y = 14.$$

Демек уулу азыр 14 жашта.
Экинчи теңдемеден атасынын жашын табабыз.
$x - 2 \cdot 14 = 22$,
$x = 22 + 28$,
$x = 50$. *Демек, атасы азыр 50 жашта. Жообу: (б).*

7. Чыгаруу: Кездемелердин алгачкы баасы:
биринчисиники х сом, экинчисиники у сом болсун.

биринчи кездеме 10%га арзандаса $\frac{x}{100} \cdot 10 = 0{,}1x$ *сомго арзандаган болот.*	*экинчи кездеме 15%га арзандаса* $\frac{y}{100} \cdot 15 = 0{,}15y$ *сомго арзандаган болот.*

$x - 0{,}1x = 0{,}9x$ *арзандаган баа.* | $y - 0{,}15y = 0{,}85y$ *арзандаган баа.*

Демек, маселенин шарты боюнча төмөндөгүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.

$$\begin{cases} 6 \cdot 0{,}9x + 10 \cdot 0{,}85y = 261, \\ x - y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 5{,}4x + 8{,}5y = 261, \\ x = 2 + y, \end{cases}$$

$x = 2 + y$ *ти биринчи теңдемеге коюп,*

$5{,}4(2 + y) + 8{,}5y = 261$ *теңдемесин алабыз.*

$$10{,}8 + 5{,}4y + 8{,}5y = 261$$
$$13{,}9y = 261 - 10{,}2$$
$$13{,}9y = 250{,}2$$
$$y = 250{,}2 : 13{,}9$$

$y = 18$ *'экинчи кездеменин алгачкы баасы.*

Анда *биринчи кездеменин баасы x=2+18=20 сом болот.*

$6 \cdot 20 + 10 \cdot 18 = 120 + 180 = 300$ *сом төлөмөк.*

Жообу: (г).

8. Чыгаруу: Эмгек өндүрүмдүүлүгү жогорулаганга чейин биринчи уста бир күндө x тетик жасасын, 2-уста y тетик жасасын дейли.

1-устанын эмгек өндүрүмдүүлүгү 10%га б.а. 0,1x ке;

2-устаныкы 20%га б.а. 0,2y ке жогорулаcа,

1-уста бир күндө x+0,1x=1,1x,

2-уста бир күндө y+0,2y=1,2y тетик жасаган болот.

Маселенин шарты боюнча төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзөбүз.

$$\begin{cases} x + y = 90, \\ 1{,}1x + 1{,}2y = 103, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 90 - y, \\ 1{,}1x + 1{,}2y = 103, \end{cases}$$

$1{,}1(90 - y) + 1{,}2y = 103,$

$99 - 1{,}1y + 1{,}2y = 103,$

$0{,}1y = 103 - 99,$

$0{,}1y = 4,$

$y = 4 : 0{,}1,$

$y = 40.$ *Эми x ти табабыз x=90-40=50.*

Демек, *эмгек өндүрүмдүүлүгү жогорулаганга чейин 1-уста 50 дөн, 2-уста 40 тан тетик жасаган.*

Кийин: *1-уста* $1{,}1 \cdot 50 = 55$ *тетик,*

2-уста $1{,}2 \cdot 40 = 48$ *тетик жасаган. Жообу: (в).*

9. Чыгаруу: Эмил ойлогон сан x, Кемел ойлогон сан y болсун. Маселенин шарты боюнча төмөндөгүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.

$$\begin{cases}2x+3y=85,\\ x+y=35,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+3y=85,\\ x=35-y,\end{cases}\quad 2(35-y)+3y=85,$$

$$70-2y+3y=85,$$

$$y=85-70,$$

$$y=15.$$

x=35−15=20. демек, ойлонулган сандар 20 жана 15.

Жообу: (б).

10. Чыгаруу: Чымчыктардын саны x, чырпыктардын саны y болсун. Маселенин шарты боюнча, теңдемелер системасын түзөбүз.

$$\begin{cases}x-y=1,\\ y-\frac{x}{2}=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x=1+y,\\ 2y-x=2,\end{cases}\quad 2y-(1+y)=2,\ 2y-1-y=2,$$

$$y=3$$

демек, x=1+3=4. Жообу: (а).

Тест-9. Катыш, пропорция, пайыз.

1. Чыгаруу: Пропорциянын негизги касиетин пайдаланабыз: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $a\cdot d=c\cdot b$

$$\frac{x}{25}=\frac{6}{75},$$

$$75\cdot x=6\cdot 25,$$

$$75x=150,$$

$$x=150:75,$$

$x=2$. *Жообу: (б)*

2. Чыгаруу: Пропорциялуулук коеффицентин а деп алалы, анда $3a+5a=192$, *теңдемесин алабыз*

$$8a=192,$$

$$a=192:8,$$

$$a=24.$$

Демек, $3a=3\cdot 24=72$, $5a=5\cdot 24=120$. *Жообу: (а)*

3. Чыгаруу: $\frac{x+5}{x+8}=\frac{3}{4}$,

$$4(x+5)=3(x+8),$$

$$4x+20=3x+24,$$

$4x - 3x = 24 - 20$,

$x = 4$. *Жообу: (г)*

4. *Чыгаруу:* $6x + 5x = 11x$ *кой – эчкилердин саны.*

анда $\frac{5}{11x} = \frac{1}{11}$ *пропорциясын алабыз*

$11x = 55$,

$x = 5$, *демек, койлордун саны* $6 \cdot x = 6 \cdot 5 = 30$. *Жообу: (в)*

5. *Чыгаруу:* $3a$ *- алмалардын саны;*

$5a$ *–теректердин саны;*

$7a$ *–өрүктөрдүн саны болсун,*

Демек, $3a + 5a + 7a = 150$ *теңдемесин алабыз*

$15a = 150$,

$a = 10$;

анда теректердин саны: $5a = 5 \cdot 10 = 50$ *болот*

Жообу: (д)

6. *Чыгаруу: Токарь 72 тетикти x саатта даярдасын дейди, анда төмөндөгүдөй пропорция түзүүгө болот.*

$\frac{4}{18} = \frac{x}{72}$,

$18x = 4 \cdot 72$,

$18x = 288$,

$x = 288 : 18$,

$x = 16$. *16 саатта даярдайт.* *Жообу: (а)*

7. *Чыгаруу:* $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ *барабарсыздыгын пайдаланабыз*

$6 \cdot x = 4 \cdot 3$,

$6x = 12$,

$x = 12 : 6$

$x = 2$. *2 күндө ташыйт .* *Жообу: (г)*

8. *Чыгаруу:* $4x$ *- тооктордун саны ,*

$3x$ *– өрдөктөрдүн саны,*

$2x$ *– каздардын саны маселенин шарты боюнча:*

$3x = 105$,

$x = 105 : 3$,

$x = 35$.

Демек, тооктор $4 \cdot 35 = 140$, *каздар* $2 \cdot 35 = 70$,

тооктор жана каздар $140 + 70 = 210$. *Жообу: (б)*

9. Чыгаруу: $60 - 100\%$

$$15 - x\%$$

$60x = 15 \cdot 100$,

$60x = 1500$,

$x = 1500 : 60$,

$x = 25$ *демек,* 25%*ын түзөт.* *Жообу: (в)*

10. Чыгаруу: 200г эритмеде канча туз бар экендигин таап алабыз.

$200 - 100\%$

$т - 12\%$

$100 \cdot т = 200 \cdot 12$,

$т = 2400 : 100$,

$т = 24г$.

Эритмеге x *г суу кошулсун дейли. Анда пайда болгон эритменин массасы* $200 + x$ *г болот.*

$200 + x - 100\%$

$24 - 10\%$

$10(200 + x) = 24 \cdot 100$,

$2000 + 10x = 2400$,

$10x = 400$,

$x = 40г$.

Демек, 40 г суу кошулат. Жообу: (а)

11. Чыгаруу: $a - 100\%$

$$3b - b\%$$

$a \cdot b = 300b$,

$a = (300b) : b$,

$a = 300.$ *Жообу: (г)*

12. Чыгаруу: Маселенин шарты боюнча a *саны* b *санынын* 70%*н түзөт башкача айтканда* $a = 0{,}7b$, *с саны* d *санынын* 90%*ын түзөт башкача айтканда* $c = 0{,}9d$. *Эми көбөйтүндүлөрдү табабыз.* $a \cdot c = 0{,}7b \cdot 0{,}9d = 0{,}63b \cdot d$ *Демек* $a \cdot c$ *саны* $b \cdot d$ *санынын* 63% *түзөт.*

Жообу: (б)

Тест-10. Кыскача көбөйтүүнүн формулалары. Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.

1. Чыгаруу: $a^2 - 9b^2 = (a-3b)(a+3b)$ *Жообу: (г)*

2. Чыгаруу: $(2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$; *Жообу: (а)*

3. Чыгаруу: $8a^3 - b^3 = (2a-b)(4a^2 + 2ab + b^2)$;

Жообу: (д)

4. Чыгаруу: Тандоо жолу менен чыгарабыз:
$a = 7,\ b = 1$;
Чындыгында $7^2 + 1 = 49 + 1 = 50$
$a - b = 7 - 1 = 6$; *Жообу: (б)*

5. Чыгаруу: $(x-2y)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - 8y^3 =$
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ *Жообу: (г)*

6. Чыгаруу: $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 ==$
$9 \cdot 2 - 24 + 4 \cdot 2 = 18 - 24 + 8 = 2$ *Жообу: (а)*

7. Чыгаруу: $\frac{x^2}{49} - \frac{25}{y^2} = \left(\frac{x}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{7} - \frac{5}{y}\right)\left(\frac{x}{7} + \frac{5}{y}\right)$

Жообу: (д)

8. Чыгаруу: $a^2 + b^2 = 13;\ a \cdot b = 6$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 13 - 2 \cdot 6 = 1$
Жообу: (б)

9. Чыгаруу: $m^2 - 2mn + n^2 = 4$,
$(m-n)^2 = 4$,
$m - n = 2$,
Демек, $(m-n)^8 = 2^8 = 256$. *Жообу: (б)*

10. Чыгаруу: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 40 \cdot 42$
Демек, $x = 41$. *Жообу: (в)*

Тест – 11. Квадраттык тамыр. Квадраттык теңдемелер.

1. Чыгаруу: $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = |\sqrt{7}-3|$ *мында* $\sqrt{7} < 3$ *болгондуктан* $\sqrt{7}-3<0$ *болот. Модулдун касиети боюнча* $|\sqrt{7}-3| = -(\sqrt{7}-3) = 3-\sqrt{7}$ *болот.*

Жообу: (г)

2. Чыгаруу: $\sqrt{(x-5)^2} = x-5$

$\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$ *болгондуктан берилген теңдеме*

$|x-5| = x-5$ *түрүнө келет.*

Бул барабардык $x-5 \geq 0$ *болгондо гана аткарылат.*

Демек, $x \geq 5$ *болот.*

Жообу: в)

3. Чыгаруу: $\sqrt{(8-2\sqrt{5})^2}$ *бул туюнтмада* $8 > 2\sqrt{5}$ *ошондуктан* $8-2\sqrt{5} > 0$ *болот. Арифметикалык тамырдын касиети боюнча*

$\sqrt{(8-2\sqrt{5})^2} = |8-2\sqrt{5}| = 8-2\sqrt{5}$ *болот.*

Жообу: г)

4. Чыгаруу: $\sqrt{50 \cdot 24 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 4 \cdot 36} =$
$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$ *Жообу: б)*

5. Чыгаруу: $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2 + \sqrt{82^2 - 18^2} = (\sqrt{8})^2 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} +$
$+(\sqrt{2})^2 + \sqrt{(82-18)(82+18)} = 8 - 2 \cdot 4 + 2 + \sqrt{64 \cdot 100} =$
$= 2 + 8 \cdot 10 = 82.$ *Жообу: а)*

6. Чыгаруу: $5x^2 - 20x = 0,$

$5x(x-4) = 0,$

$x = 0, \ \ x - 4 = 0,$

$x = 4\ .$ *Жообу: д)*

7. Чыгаруу: $(x+5)(2x-7) = 0,$

$x + 5 = 0, \ \ 2x - 7 = 0,$

$x = -5; \quad 2x = 7,$

$x = 7:2, \ \ x = 3\frac{1}{2}.$ *Жообу: в)*

8. Чыгаруу: $8x^2 - 14x + 5 = 0,$

$D = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5 = 196 - 160 = 36,$

$$x_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 6}{16};$$

$$x_1 = \frac{14-6}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{14+6}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}.$$ Жообу: г)

9. Чыгаруу: $(2x^2 + 3)^2 + 11 = 12(2x^2 + 3)$

$t^2 - 12t + 11 = 0$ *квадраттык теңдемесин алабыз*

$D = 144 - 44 = 100.$

$t_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2}; \quad t_1 = \frac{12-10}{2} = \frac{2}{2} = 1,$

$t_2 = \frac{12+10}{2} = \frac{22}{2} = 11.$

Демек, $2x^2 + 3 = 1$,

$2x^2 = 1 - 3$,

$2x^2 = -2$.

бул теңдеме тамырга ээ болбойт.

$2x^2 + 3 = 11,$

$2x^2 = 11 - 3,$

$2x^2 = 8,$

$x^2 = 4,$

$x_1 = -2; \quad x_2 = 2.$

Жообу: а)

10. Чыгаруу: $5x^2 - 7x - 9 = 0$ *Виеттин теоремасын пайдаланабыз*

$x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{5}; \quad x_1 + x_2 = -\frac{9}{5}$ *Жообу: д)*

11.Чыгаруу: $x^2 + bx - 12 = 0, \ x_1 = 3$ *Виеттин теоремасын пайдаланып экинчи тамырды таап алабыз*

$x_1 \cdot x_2 = -12$

$3 \cdot x_2 = -12, \ \ x_2 = -12:3, \ \ x_2 = -4.$

$x_1 + x_2 = -b,$

$3 + (-4) = -b,$

$-b = -1, \ b = 1.$

Жообу: б)

12. Чыгаруу: $x^2 + px + q = 0$, *бул теңдеменин тамырларын* x_1, x_2 *деп алсак, маселенин шарты боюнча төтөмөнкүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.*

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 = 5 \end{cases} \quad (1 + x_2)^2 - x_2^2 = 5,$

$1 + 2x_2 + x_2^2 - x_2^2 = 5,$

$1 + 2x_2 = 5,$

$2x_2 = 5 - 1,$

$2x_2 = 4$,
$x_2 = 2$ *демек,* $x_1 = 1 + 2 = 3$.
Бул теңдеменин тамырлары $x_1 = 3, x_2 = 2$.
Виеттин теоремасын пайдаланып p *жана* q *коэффиценттерин табабыз.*
$x_1 + x_2 = -p$, $3 + 2 = -p$, $p = -5$.
$x_1 \cdot x_2 = q$, $3 \cdot 2 = q$, $q = 6$, *Жообу: (в)*

Тест – 12. Бүтүн көрсөткүчтүү жана рационал көрсөткүчтүү даража.

1. Чыгаруу: $2^5 \cdot 2^{-7} \cdot 2^6 \cdot 2^{-2} = 2^{5+(-7)+6+(-2)} = 2^2 = 4$.
Жообу: (б)

2. Чыгаруу: $(x^2 - y^2) : (x^{-1} + y^{-1}) = (x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) =$
$= (x^2 - y^2) : \left(\frac{y+x}{xy}\right) = (x - y)(x + y) \cdot \frac{xy}{y+x} = xy(x - y)$.
Жообу: (а)

3. Чыгаруу: $x^9 = 512$,
$x = \sqrt[9]{512}$,
$x = 2$. *Жообу: (в)*

4. Чыгаруу: $(x - 3)^4 = 81$,
$x - 3 = \sqrt[4]{81}$,
$x - 3 = 3$, $x - 3 = -3$,
$x = 6$. $x = 0$. *Жообу: (д)*

5. Чыгаруу: $\sqrt[4]{0{,}0081} + \sqrt[3]{1000} - \sqrt[5]{3125} = 0{,}3 + 10 - 5 = 5{,}3$
Жообу: (г)

6. Чыгаруу: $\sqrt[12]{2^{48}} + \sqrt[3]{-729} - \sqrt[3]{-1000} = 2^4 + (-9) - 10 =$
$= 16 - 9 + 10 = 17$. *Жообу: (б)*

7. Чыгаруу:
$\sqrt[3]{3^3} + \sqrt[4]{4^2} + \sqrt[10]{5^{20}} = 3 + \sqrt{4} + 5^2 = 3 + 2 + 25 = 30$
Жообу: (д)

8. Чыгаруу:
$\sqrt[3]{2^{-6}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{6}{3}} \cdot \sqrt[4]{16^3} = 2^{-2} \cdot \sqrt[4]{2^{12}} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^3 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ *Жообу:*
(а)

9. *Чыгаруу:* $5^{\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} + 4^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} + (\frac{27}{125})^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} + 4^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} + (\frac{3^3}{5^3})^{\frac{1}{3}} =$

$=5^2 + 4^{\frac{1}{2}} + \frac{3^{3\cdot\frac{1}{3}}}{5^{3\cdot\frac{1}{3}}} = 25 + \sqrt{4} + \frac{3}{5} = 25 + 2 + \frac{3}{5} = 27\frac{3}{5}$

Жообу: (д)

10. *Чыгаруу:* $(x^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,4})^3 \cdot x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2} = x^{-\frac{3}{7}\cdot 3} \cdot y^{-0,4\cdot 3} \cdot x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2} =$

$= x^{-\frac{9}{7}} \cdot y^{-1,2} \cdot x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2} = x^{-\frac{9}{7}+\frac{2}{7}} \cdot y^{-1,2+0,2} = x^{-\frac{7}{7}} \cdot y^{-1} =$

$=x^{-1} \cdot y^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}.$ *Жообу: (б)*

11. *Чыгаруу:*

$a^{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{9}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{18}} = a^{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}} = a^{\frac{6}{18}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Жообу: (в)

12. *Чыгаруу:* $(x^3 + 5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{32}$,

$[(x^3 + 5)^{\frac{1}{3}}]^3 = (32^{\frac{1}{3}})^3$,

$x^3 + 5 = 32$,

$x^3 = 32 - 5$,

$x^3 = 27$,

$x = \sqrt[3]{27}$, $x = 3$. *Жообу: (г)*

Тест – 13. Рационалдык теңдемелер. Модулдуу теңдемелер. Барабарсыздыктар.

1. *Чыгаруу:*

$\frac{y^2-6y}{y-y} = \frac{5}{5-y}$,

$\frac{y^2-6y}{y-5} = -\frac{5}{y-5}$,

$y^2 - 6y = -5$,

$y^2 - 6y + 5 = 0$,

$D = 36 - 20 = 16$,

$y \neq 5$ *шарты менен теңдеменин эки жагын тең* $y - 5$*ке көбөйтөбүз.*

$y_{1/2} = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\pm 4}{2}$; $y_1 = 5$, $y_2 = 1$.

Жообу: а)

2. *Чыгаруу:*

$\frac{4}{x+3} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1$,

$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{x-3} - \frac{1}{x-3} + 1 = 0$,

$4(x-3) + 5(x+3) - (x+3) +$

$x \neq -3$

$x \neq 3$ *шарты менен теңдеменин эки жагын тең*

$+(x+3)(x-3)=0,$ $(x+3)(x-3)$

$4x-12+5x+15-x-3+x^2-9=0,$ *көбөйтөбүз*

$x^2+8x-9=0,$

$D=64+36=100$

$x_{1/2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-8\pm10}{2};\quad x_1=1,\quad x_2=-9$

Жообу: д)

3. Чыгаруу:

$$\frac{21}{x+1}=\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x},$$

$x\neq-1,\quad x\neq2,\ x\neq0$ *шарты менен теңдеменин эки жагын тең* $x(x+1)(x-2)$ *ге көбөйтөбүз.*

$21x^2-42x=16x^2+16x-$

$-6x-6x^2+6x+12,$

$11x^2-64x-12=0,$

$D=4096+4\cdot11\cdot12=4096+528=4624;$

$x_{1/2}=\frac{64\pm\sqrt{4624}}{22}=\frac{64\pm68}{22};$

$x_1=\frac{64+68}{22}=\frac{132}{22}=6,$

$x_2=\frac{64-68}{22}=\frac{-4}{22}=-\frac{2}{11};$ Жообу: *б)*

4. Чыгаруу: $|5x+3|=8$

Эгерде $5x+3\geq0$ *болсо, эгерде* $5x+3<0$ *болсо*

$5x+3=8,$ $5x+3=-8,$

$5x=8-5,$ $5x=-8-3,$

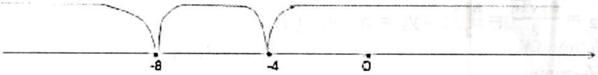
$5x=5,$ $5x=-11,$

$x=1.$ $x=-\frac{11}{5}.$ *Жообу: (г)*

5. Чыгаруу: $|x+4|=|8+x|$ *бул теңдеменин сыналуучу чекиттерин таап алабыз:*

$x+4=0,\quad 8+x,$

$x=-4.\quad x=-8$ *бул сыналуучу чекиттер сан огун*



$(-\infty;-8),[-8;-4)$ *жана* $[-4;+\infty)$ *интервалдарына бөлөт.*

1) Эгерде $x\epsilon(-\infty;-10)$ *болсо, берилген теңдемеден*

$-(x+4)=-(8+x)$ *теңдемесин алабыз.*

$-x-4=-8-x$ *бул теңдеменин тамыры жок.*
2) $x\epsilon[-8;-4)$ *болсо, берилген теңдемеден*
$-(x+4)=8+x$ *теңдемесин алабыз.*
$-x-4=8+x$,
$-x-x=8+4$,
$-2x=12$,
$x=12:(-2)$,
$x=-6$ *бул тамыр* $[-8;-4)$ *интервалына таандык, ал теңдеменин тамыры болот.*
3) $x\epsilon[-4;+\infty)$ *болсо,* $x+5=8+x$ *теңдемесин алабыз.*
Бул теңдеменин тамыры жок. *Жообу: (а)*

6. Чыгаруу: $|x^2-x|=5x-5$ *сыналуучу чекиттерин табабыз.*
$x^2-x=0$,
$x(x-1)=0$,
$x=0;\ x-1=0$,
$x=1$ *бул сыналуучу чекиттер сан огун* $(-\infty;0);[0;1)$ *жана* $[1;+\infty)$ *интервалдарына бөлөт.*
$x\epsilon[1;+\infty)$ *болсо, берилген теңдемеден*
$x^2-x=5x-5$ *теңдемеси келип чыгат*
$x^2-6x+5=0$,
$D=36-20=16$,
$x_{1/2}=\frac{6+\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm4}{2}$;
$x_1=1,\ x_2=5$; *бул тамырлар* $[1;+\infty)$ *интервалына таандык демек алар чыгарылыш болот.*

7. Чыгаруу: $|x+7|\geq3$; *БАО:* $x\epsilon R$,
$x+7=0$
$x=-7$ *сыналуучу чекит, ал сан огун* $(-\infty;-7)$; $[-7;+\infty)$ *интервалдарына бөлөт.*
1) $x\epsilon(-\infty;-7)$ *болсо,* $-(x+7)\geq3$; *барабарсыздыгын алабыз.*
$-x-7\geq3$,
$-x\geq3+7$,
$-x\geq-10$,
$x\leq10$, $(-\infty;-10)$ *көптүгү чыгарылыш болот.*
2) $x\epsilon[-7;+\infty)$ *болсо,* $x+7\geq3$; *барабарсыздыгын алабыз.*

$x \geq 3 - 7,$

$x \geq -4.$ $[-4; +\infty)$ *көптүгү чыгарылыш болот.*

Барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү

$(-\infty; -10) \cup [-4; +\infty)$

8. Чыгаруу: $|6 - 2x| < 7$ *, бизге белгилүү* $|x| \leq a,\ a > 0$ *болгондо* $-a \leq x \leq a$ *болот. Демек берилген барабарсыздыкты* $-7 < 6 - 2x < 7$ *түрүндө жазууга*

$-7 - 6 < -2x < 7 - 6$ *болот.*

$-13 < -2x < 1$

$\frac{13}{2} > x > -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}$ *демек барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү* $\left(-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$

Жообу: *(г).*

9. Чыгаруу: $|3x^2 - x + 5| < -2;$

$|3x^2 - x + 5|$ *туюнтмасы ар дайым нөлдөн чоң же барабар. Ошондуктан бул барабарсыздык чыгарылышка ээ болбойт.*
Жообу: *(г).*

10. Чыгаруу: $\begin{cases} 5x - 3 \leq 3x + 1, \\ 3x + 2 > 2x - 7, \end{cases}$

Адегенде 1-барабарсыздыкты, кийин экинчи барабарсыздыкты чыгарабыз.

$5x - 3 \leq 3x + 1,$ $\quad$ $3x + 2 > 2x - 7,$

$5x - 3x \leq 1 + 3,$ $\quad$ $3x - 2x > -7 - 2,$

$2x \leq 4,$ $\quad$ $x > -9,$

$x \leq 2,$

Демек, барабарсыздыктар системасынын чыгарылыш көптүгү $-9 < x \leq 2$ *б.а.*

$$(-\infty; 2] \cap (-9; +\infty) = (-9; 2]$$

Жообу: *(в).*

11. Чыгаруу: $\begin{cases} 5(x+1) - x > 2x + 2, \\ 4(x+1) - 2 \le 2(2x+1) - x; \end{cases}$

$$5(x+1) - x > 2x + 2, \qquad 4(x+1) - 2 \le 2(2x+1) - x,$$
$$5x + 5 - x - 2x > 2, \qquad 4x + 4 - 2 \le 4x + 2 - x,$$
$$2x > 2 - 5, \qquad 4x - 4x + x \le 2 - 2,$$
$$2x > -3, \qquad x \le 0.$$
$$x > -\frac{3}{2}.$$

Демек, системанын чыгарылышы $-\frac{3}{2} < x \le 0$.

Жообу: (а).

12. Чыгаруу: $\begin{cases} \frac{x-5}{6} \le \frac{3x-1}{4} \\ \frac{x+2}{3} > \frac{x+3}{5} \end{cases}$

$$\frac{x-5}{6} \le \frac{3x-1}{4}, \qquad \frac{x+2}{3} > \frac{x+3}{5},$$
$$4x - 20 \le 18x - 6, \qquad 5x + 10 > 3x + 9,$$
$$4x - 18x \le -6 + 20, \qquad 5x - 3x > 9 - 10,$$
$$-14x \le 14, \qquad 2x > -1,$$
$$x \ge -1. \qquad x > -\frac{1}{2}.$$

Демек барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы
$x > -\frac{1}{2}$ *б.а.* $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. *Жообу: (б).*

Тест – 14. Прогрессиялар.

1. Чыгаруу: –4,-1,2,... арифметикалык прогрессиясында

$$a_1 = -4, \quad d = 3, \quad n = 20$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ *формуласын пайдаланабыз*

$a_{20} = -4 + (20 - 1) \cdot 3 = -4 + 19 \cdot 3 = -4 + 57 = 53.$

Жообу: (д).

2. Чыгаруу:1, 6, 11, 16,... бул арифметикалык прогрессияда
$a_1 = 1,\ d = -5$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 5 = 1 + 5n - 5 = 5n - 4$$

Жообу: (в)

3. *Чыгаруу: – 20 саны 30, 25, 20,... прогрессиясында*
$a_1 = 30,\ d = -5,\ n = ?$ *-20 канчанчы мүчө экендигин табабыз.*
$30 + (n-1)(-5) = -20$

$$30 - 5n + 5 = -20$$
$$35 - 5n = -20$$
$$-5n = -20 - 35$$
$$-5n = -55$$
$$n = -55 : (-5)$$
$$n = 11$$

Демек 11-мүчө болот. *Жообу: (в).*

4. *Чыгаруу:* $a_{10} = 41,\ a_{30} = 121$ *арифметикалык прогрессиянын ар мүчөсү өзүнөн бирдей алыстатылган эки мүчөнүн арифметикалык орточосуна барабар, б.а.*

$a_{20} = \frac{a_{10}+a_{30}}{2} = \frac{41+121}{2} = \frac{162}{2} = 81.$ *Жообу: (а)*

5. *Чыгаруу: Арифметикалык прогрессияда*
$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ *аткарылат.*
$a_3 = \frac{a_2+a_4}{2} = \frac{16}{2} = 8,\quad a_8 = \frac{a_7+a_9}{2} = \frac{46}{2} = 23.$
Демек, $a_3 + a_8 = 8 + 23 = 31.$ *Жообу: (г)*

6. *Чыгаруу:149дан 160ка чейинки сандардын катары*
$a_1 = 149$ *жана* $a_{12} = 160$ *болгон арифметикалык прогрессия болот.*
$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ *формуласын пайдаланабыз.*
$S_{12} = \frac{149+160}{\cancel{2}} \cdot \cancel{12} = 309 \cdot 6 = 1854$. *Жообу: (б)*

7. *Чыгаруу:* $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ *формуласын пайдаланабыз.*
$2x + 2 = \frac{2x-1+x+8}{2}$ *теңдемесин чыгарабыз.*
$4x + 4 = 3x + 7,$
$4x - 3x = 7 - 4,$
$x = 3.$
Демек, *1-мүчө* $2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5;$

2-мүчө $2x + 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$;

3-мүчө $x + 8 = 3 + 8 = 11$;

5,8,11 сандары. *Жообу: (в).*

8. *Чыгаруу: Мында* $S_n = 2n^2 - 3n$ *кандайдыр бир арифметикалык прогрессиянын суммасынын формуласы.*

$n = 1$ *болгондо ошол сумма биринчи мүчөнү билдирет, б.а.*

$S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$ *демек* $a_1 = -1$

$S_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

Демек, $a_1 + a_2 = 2$ *мындан* $a_2 = 2 - (-1) = 3$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

$d = 4$ *берилген арифметикалык прогрессиянын айырмасы,*

анда $a_8 = a_1 + (8 - 1)d = -1 + 7 \cdot 4 = -1 + 28 = 27$.

$a_8 = 27$. *Жообу: (д).*

9. *Чыгаруу: 1;2;4;8,..., геометриялык прогрессиясында*

$b_1 = 1$, *бөлүмү* $q = 2$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ *формуласы боюнча* $b_7 = 1 \cdot 2^6 = 64$

Жообу: (а).

10. *Чыгаруу:* $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$b_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 2^0 = 3$$

$$b_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$b_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 4 = 12$$

Жообу: (г).

11. *Чыгаруу: 2; x; 32 геометриялык прогрессияда*

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ *болот.*

Демек, $x^2 = 2 \cdot 32$,

$x^2 = 64$,

$x^2 = \sqrt{64} = 8$. *Жообу: (б).*

12. *Чыгаруу: 192; 3,6,12,...,* $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ *формуласын пайдаланабыз.* $b_1 = 3$, $q = 2$;

демек, $3 \cdot 2^{n-1} = 192$,

$2^{n-1} = 192{:}3$,

$2^{n-1} = 64$,

$2^{n-1} = 2^6$,

$n - 1 = 6$,

$n = 7$. *Жообу: (в).*

13. Чыгаруу: 1+2+4+,...,+128. Мында
$b_1 = 1,\ q = 2,\ \ b_n = 128$ *болгон геометриялык прогрессия.*
Адегенде n *ди таап алалы.*
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ *формуласы боюнча* $1 \cdot 2^{n-1} = 128,$
$2^{n-1} = 2^7,$
$n - 1 = 7,$
$n = 8.$

Сумманы *табуу үчүн* $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ *формуласын колдонобуз.*
$S_8 = \frac{128 \cdot 2 - 1}{2-1} = \frac{256-1}{1} = 255.$ *Жообу: (а).*

14. Чыгаруу: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, *мында* $b_1 = 2,\ q = 3,$
$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ *формуласын колдонобуз.*
$S_4 = \frac{2 \cdot (3^4-1)}{2-1} = \frac{2 \cdot 80}{1} = 160.$ *Жообу: (д).*

15. Чыгаруу: $S = \frac{b_1}{1-q}$ *формуласын пайдаланабыз.*
$b_1 = 1,\ q = \frac{1}{2},$
$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ *Жообу: (б).*

Тест-15. Тригонометрия.

1. Чыгаруу: $480^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{8\pi}{3}$*рад(60ка кыскарттык)*
Жообу: (в).

2. Чыгаруу: $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 5 \cdot 30^0 = 150^0$ *Жообу: (г).*

3. Чыгаруу: $cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$ *формуласын пайдаланабыз.*
$$cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$
α II чейрекке таандык, II чейректе $cos\alpha$ *терс маани алат.*
Демек, $cos\alpha = -\frac{3}{5}.$ *Жообу: (д).*

4. Чыгаруу: Адегенде $cos\alpha$ *ны таап алабыз.*

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ *формуласынан* $cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$ *келип чыгат.*

$$cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{16}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{25}{16}}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

$cos\alpha$ *III чейректе терс демек,* $cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Эми $sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

Демек , $sin\alpha = -\frac{3}{5}$. *Жообу: (а).*

5. *Чыгаруу:* $(1 - cos\alpha)(1 + cos\alpha) = 1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$

Жообу: (в).

6. *Чыгаруу:* $sin750^0 + cos1140^0 = sin(2 \cdot 360^0 + 30^0) + cos(3 \cdot 360^0 + 60^0) = sin30^0 + cos60^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Жообу: (б).

7. *Чыгаруу:* $cos\alpha = \frac{3}{5}$ *адегенде* $sin\alpha$ *ны таап алабыз.*

$$sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

$0 < \alpha < 90^0$ *болгондуктан* $sin\alpha = \frac{4}{5}$

$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$. *Жообу: (а).*

8. *Чыгаруу:*

$$\frac{1}{sin^2x} - \frac{1}{tg^2x} = \frac{1}{sin^2x} - \frac{1}{\frac{sin^2x}{cos^2x}} = \frac{1}{sin^2x} - \frac{cos^2x}{sin^2x} = \frac{1-cos^2x}{sin^2x} = \frac{sin^2x}{sin^2x} = 1$$

Жообу: (д).

9. *Чыгаруу:* $7sin120^0 \cdot tg300^0 =$

$= 7sin(90^0 + 30^0) \cdot tg(270^0 + 30^0) = 7 \cdot cos30^0 \cdot (-ctg30^0) =$

$= 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) = -\frac{7 \cdot 3}{2} = -\frac{21}{2}$

Жообу: (г).

10. Чыгаруу: $ctg\alpha - tg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{sin\alpha \cdot cos\alpha} =$
$= \frac{cos2\alpha}{\frac{1}{2}sin2\alpha} = 2ctg2\alpha$ *Жообу: (в).*

11. Чыгаруу: $\frac{1-2cos^2\alpha}{cos\alpha+sin\alpha} = \frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha-2cos^2\alpha}{cos\alpha+sin\alpha} =$

$$= \frac{sin^2\alpha - cos^2\alpha}{cos\alpha + sin\alpha} = \frac{(cos\alpha + sin\alpha)(cos\alpha - sin\alpha)}{cos\alpha + sin\alpha} = cos\alpha - sin\alpha$$

Жообу: (д).

12. Чыгаруу: $arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 30^0 + 45^0 = 75^0$

Жообу: (а).

13. Чыгаруу:
$arctg1 - arcsin\frac{1}{2} + arctg\sqrt{3} = 45^0 - 30^0 + 60^0 = 75^0$

Жообу: (д).

14. Чыгаруу: $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};$
$sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k.$
$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k.$
$3x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k.$
$x = \frac{\pi}{12} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}.$ *Жообу: (б).*

15. Чыгаруу: $tgx - 2ctgx + 1 = 0;$
$tgx - 2 \cdot \frac{1}{tgx} + 1 = 0$.
$tg^2x - 2 + tgx = 0$.
$tgx = t$ *жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.*
$t^2 + t - 2 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -2.$
$tgx = 1,$ $\qquad tgx = -2,$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$ $\qquad x = arctg(-2) + \pi n.$

Жообу: (г).

16. *Чыгаруу:* $4cosx = 4 - sin^2x;$
$4cosx = 3 + 1 - sin^2x,$
$4cosx = 3 + cos^2x,$
$cos^2x - 4cosx + 3 = 0,$
$cosx = t,$
$t^2 - 4t + 3 = 0,\ D = 16 - 12 = 4,\ t_1 = 1,\ \ t_2 = 3.$
$cosx = 1,$ $cosx = 3$ *теңдеменин тамыры жок*
$x = 2\pi n,\ n \in Z.$

Жообу: (а).

Тест-16. Функциялар.

1. *Чыгаруу:* $y = 2x^2 + 5x - 3,$ $D(y) = R$ *анткени ал бүтүн туюнтма.* *Жообу: в)*

2. *Чыгаруу:* $y = \frac{3x^2-5}{x-3};$ $x \neq 3$ *себеби* $x - 3 = 0$ *болуп, бөлчөк мааниге ээ болбой*
$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty);$ *калат.* *Жообу: д)*

3. *Чыгаруу:* $y = \frac{10}{2x-7};$ $2x - 7 = 0$
$x = 3,5$ *Демек,* 3,5*саны аныкталуу областка кирбейт.*

Жообу: б)

4. *Чыгаруу:* $y = \sqrt{x^2 - 4}$, *функция мааниге ээ болуш үчүн* $x^2 - 4 \geq 0$ *болуш керек.*

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

мындан $x \geq 2$ *келип чыгат.*
$x \leq -2$

Демек, $D(y) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Жообу: г)

5. *Чыгаруу:* $y = \sqrt{9 - x^2}$

$$9 - x^2 \geq 0$$

$(3 - x)(3 + x) \geq 0,$ $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3 + x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{cases}$

Демек, $D(y) = [-3; 3]$, *Жообу: в)*

6. *Чыгаруу:* $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$;

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases} \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3 + x \geq 0 \\ 2 - x > 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases} \begin{cases} -x \geq -3 \\ x \geq -3 \\ -x > -2 \\ x > -2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ x < 2 \\ x > -2 \end{cases} \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Демек $D(y) = [-3; 3] \cap (-2; 2) = (-2; 2)$.

Жообу: а)

7. *Чыгаруу:* $y = x^2 + 8x + 11$ *параболасынын чокусунун координаталарын табуу үчүн* $x = -\frac{b}{2a}$, n *ди табышыбыз керек.* $m = -\frac{8}{2\cdot2} = -\frac{8}{4} = -2$ *Эми n ди табабыз.*

$$n = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 11 = 8 - 16 + 11 = 3$$

Демек, параболанын чокусунун координаталары $(-2; 3)$ *чекити.*

Жообу: д)

8. *Чыгаруу:* $y = -x^2 + x + 2$ *функциясынын графиги Ox огу менен канча жолу кесилишин табуу үчүн* $-x^2 + x + 2 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad D = 1 + 8 = 9.$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

Демек, $(2; 0)$ *жана* $(-1; 0)$ *чекиттеринде график Ox огу менен 2 жолу кесилишет.* *Жообу: б)*

9. *Чыгаруу:* $y = 3x^2 - 5x + 3$ *параболасынын Oy огу менен кесилишкен чекитти табуу үчүн* $x = 0$ *болгондогу* y *тин маанисин табабыз* $y = 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$.

Демек, $(0{,}3)$ *чекитинде график Oy огу менен кесилишет.*

Жообу: г)

10. *Чыгаруу:* $y = -x + 1$, $y = x^2 - 4x + 3$ *графиктердин кесилишүү чекитин табуу үчүн*

$x^2 - 4x + 3 = -x + 1$ *теңдемесин чыгарабыз*

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad D = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$x_1 = 2$ *жана* $x_2 = 1$ *болгондугу y тин маанилери табабыз*

$$y_1 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$y_2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

Демек, $(2; -1)$ *жана* $(1; 0)$ *чекитинде кесилишет.*

Жообу: б)

11. Чыгаруу: $y = x^2 + bx - 8$, $x = 2$ *ни коюп, эсептөө жүргүзөбүз:* $2^2 + b \cdot 2 - 8 = 0$

$$4 + 2b - 8 = 0$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

Жообу: г)

Тест – 17. Функциянын туундусу.

1 – 7. Функциялардын туундусун тапкыла.

1. Чыгаруу: $f'(x) = (x^2 + 3x + 5)' = 2x + 3$ *Жообу: а)*

2. Чыгаруу: $f'(x) = (x^4 + 2x^3)' = 4x^3 + 6x^2$ *Жообу: в)*

3. Чыгаруу:

$f'(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 6x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{6x^3 - 1}{x^2}$; *Жообу:д)*

4. Чыгаруу: $f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot \sin x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$

Жообу: г)

5. Чыгаруу:

$f'(x) = \left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \frac{2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x \cos x - x^2 \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

Жообу: б)

6. Чыгаруу:

$f'(x) = (\sin 2x \cdot \cos 2x)' = (\frac{1}{2} \sin 4x)' = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x = \sin 8x$

Жообу: г)

7. Чыгаруу: $f'(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)' = (\cos 2x)' =$

$= 2 \cdot \cos 2x \cdot (-\sin 2x) = -2 \cos 2x \cdot \sin 2x = -\sin 4x$. *Жообу: д)*

Тест – 18. Интеграл.

1 – 12. Интегралды эсептегиле.

1. *Чыгаруу:* $\int_5^{10} dx = x \Big|_5^{10} = 10 - 5 = 5;$ *Жообу: а)*

2. *Чыгаруу:* $\int_2^6 5dx = 5x \Big|_2^6 = 5 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 30 - 10 = 20;$

Жообу:в)

3. *Чыгаруу:* $\int_{-1}^5 2x\, dx = x^2 \Big|_{-1}^5 = 5^2 - (-1)^2 = 25 - 1 = 24;$

Жообу: б)

4. *Чыгаруу* $\int_{-1}^2 6x^2 dx = 2x^3 \Big|_{-1}^2 = 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot (-1)^3 = 16 + 2 = 18;$

Жообу: д)

5. *Чыгаруу:* $\int_0^1 \sqrt[5]{x^3}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} \Big|_0^1 = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} \Big|_0^1 = \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} \Big|_0^1 =$

$= \frac{5 \cdot 1^{\frac{8}{5}}}{8} - \frac{5 \cdot 0^{\frac{8}{5}}}{8} = \frac{5}{8} - 0 = \frac{5}{8};$ *Жообу: г).*

6. *Чыгаруу:* $\int_{-1}^2 (3x^2 + 2x)dx = \int_{-1}^2 3x^2 dx + \int_{-1}^2 2xdx =$

$= x^3 \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = 2^3 - (-1)^3 + 2^2 - (-1)^2 = 8 + 1 + 4 - 1 = 12$

Жообу: а)

7. *Чыгаруу:* $\int_0^1 (4x^3 - 2x + 1)dx = \int_0^1 4x^3 dx - \int_0^1 2xdx +$

$+ \int_0^1 dx = x^4 \Big|_0^1 - x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 = 1^4 - 0^4 - 1^2 + 0^2 + 1 - 0 = 1$

Жообу:в)

8. *Чыгаруу:* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}cos3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}cos3 \cdot 0 =$

$= -\frac{1}{3}cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3}cos0 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ *Жообу: д)*

9. Чыгаруу: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \cdot tg2x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \cdot tg2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot tg2 \cdot 0 =$

$= \frac{1}{2} \cdot tg\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot tg0 = \frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Жообу: б)*

10. Чыгаруу: $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 4x dx = \frac{1}{4}(-\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = -\frac{1}{4}\sin 4 \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\sin 4 \cdot 0 =$

$= -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin 0 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{8}$. *Жообу: г).*

11. Чыгаруу: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2x dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2 \cdot 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$ *Жообу: а)*

12. Чыгаруу: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$

Жообу: в)

Тест-19. Корсоткучтүү жана логарифмалык функция.

1-6. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

1. Чыгаруу: $y = 2(3^x + 1)$; *бул функцияда* x *каалагандай маани алат.*

$D(y) = R$. *Жообу: д)*

2. *Чыгаруу:* $y = 7^{\sqrt{x}}$; *функция мааниге ээ болуш үчүн* $x \geq 0$ *болуш керек.*

Демек, $D(y) = [0; +\infty)$; *Жообу: б)*

3. *Чыгаруу:* $y = \sqrt{\frac{1-3^x}{5^{-x}-5}}$; *функция мааниге ээ болуш үчүн*

$\frac{1-3^x}{5^{-x}-5} \geq 0$ *болуш керек.*

$\begin{cases} 1-3^x \geq 0 \\ 5^{-x}-5 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x \leq 1 \\ 5^{-x} > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x \leq 3^0 \\ -x > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x < -1 \end{cases}$ < -1;

Демек, $D(y) = (-\infty; -1)$ *Жообу: (г)*

4 . *Чыгаруу:* $y = log_5(4x-3)$

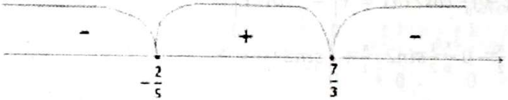
$4x - 3 > 0$,

$4x > 3$,

$x > \frac{3}{4}$, *Демек,* $D(y) = (\frac{3}{4}; +\infty)$. *Жообу: (а)*

5. *Чыгаруу:* $y = log_3 \frac{5x+2}{7-3x}$;

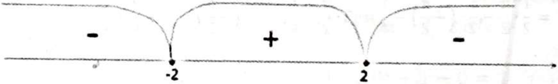
$\frac{5x+2}{7-3x} > 0$ *бул барабарсыздыкты интервалдар методу менен чыгарып,*



$D(y) = \left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{3}\right)$ *экендигин табабыз.* *Жообу: (д)*

6. *Чыгаруу:* $y = log_2(4 - x^2)$;

$4 - x^2 > 0 => (2-)(2+x) > 0$ *барабарсыздыгын интервалдар методу менен чыгарып,*



$D(y) = (-2; 2)$ *экендигин табабыз.* *Жообу: (б)*

Тест-20. Корсоткүчтүү теңдемелер жана барабарсыздыктар.

1-6. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаргыла.

1. Чыгаруу: $3^{2x} = 9^{2x-3}$

$3^{2x} = 3^{4x-6}$,

$2x = 4x - 6$,

$2x - 4x = -6$,

$-2x = -6$,
$x = 3$. *Жообу: (в)*

2. *Чыгаруу:* $2^{3x} \cdot 2^{3y} = 64$ *болсо,* $x + y = ?$
$2^{3x+3y} = 2^6$.
$3x + 3y = 6$,
$3(x + y) = 6$,
$x + y = 2$. *Жообу: (а)*

3. *Чыгаруу:* $2^{4x-1} = 2^{4-x}$,
$4x - 1 = 4 - x$,
$5x = 5$,
$x = 1$. *Жообу: (г)*

4. *Чыгаруу:* $3 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 63$,
$9 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 63$,
$7 \cdot 3^x = 63$,
$3^x = 9$,
$3^x = 3^2$,
$x = 2$. *Жообу: (б)*

5. *Чыгаруу:* $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$,
$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$, $2^x = t$ *жаңы өзгөрмө киийребиз.*
$t^2 - 5t + 4 = 0$.
$D = 25 - 16 = 9$.
$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$; $t_1 = 4$; $t_2 = 1$.
Демек, $2^x = 4$, $2^x = 1$,
$2^x = 2^2$, $2^x = 2^0$,
$x = 2$. $x = 0$. *Жообу: (д)*

6. *Чыгаруу:* $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{7-3x}$,
$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-7+3x}$.
$5x - 1 = -7 + 3x$,
$5x - 3x = -7 + 1$,
$2x = -6$,
$x = -3$. *Жообу: (г)*

7-10. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаргыла.

7. Чыгаруу: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 16,$

$2^{-x} \geq 2^4,$

$-x \geq 4,$

$x \leq -4.$ *Жообу: (в)*

8. Чыгаруу: $0{,}5^{2x+1} > 0{,}25;$

$0{,}5^{2x+1} > (0{,}5)^2,$

$2x + 1 < 2\,,$

$2x < 2 - 1\,,$

$x < \frac{1}{2}.$ *Жообу: (а)*

9. Чыгаруу: $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

$2^{x^2} > 2^{-2x+3},$

$x^2 > -2x + 3\,,$

$x^2 + 2x - 3 > 0,$ $(x + 3)(x - 1) > 0$ *интервалдар методун колдонуп*

$x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ *экендигин табабыз.*

Жообу: (д)

10. Чыгаруу: $10 \cdot 3^x - 3^{2+x} < 27$

$10 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x < 3^3$

$3^x < 3^3\,,$ $x < 3$ *Жообу: (б)*

Тест-21. Логарифмалык теңдемелерди чыгаруу.

1. Чыгаруу: $log_2(3x - 1) = 3\,,$

$log_2(3x - 1) = log_2 8\,,$

$3x - 1 = 8\,,$

$3x = 8 + 1\,,$

$3x = 9\,,$ $x = 3\,.$ *Жообу: (г)*

2. Чыгаруу: $log_2 x = 3log_4 3 - log_4 3,$

$log_2 x = log_4 27 - log_4 3\,,$

$log_2 x = log_4 \frac{27}{3}$, $\quad log_2 x = log_4 9$, $\quad log_2 x = log_2 3$, $x = 3$.

Жообу: (а)

3. *Чыгаруу:* $lg(x^2 + 2x - 1) = lg2$,

$x^2 + 2x - 1 = 2$,

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $D = 4 + 12 = 16$,

$x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm4}{2}$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. *Жообу: (в)*

4. *Чыгаруу:* $log_3(x^2 + 2x - 5) - log_3(x + 1) = 0$,

$log_3(x^2 + 2x - 5) = log_3(x + 1)$;

$x^2 + 2x - 5 - x - 1 = x + 1$,

$x^2 + 2x - 5 - x - 1 = 0$,

$x^2 - x - 6 = 0$, $D = 1 + 24 = 25$,

$x_{1/2} = \frac{1\pm5}{2}$; $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. *Жообу: (б)*

5. *Чыгаруу:* $log_5^2 x - 6log_5 x = -5$,

$log_5^2 x - 6log_5 x + 5 = 0$,

$log_5 x = t$, $\quad t^2 - 6t + 5 = 0$, $D = 36 - 20 = 16$,

$t_{1/2} = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\pm4}{2}$; $t_1 = 5$, $t_2 = 1$.

Демек, $log_5 x = 5$, $\quad log_5 x = 1$,

$x = 5^5$. $\quad log_5 x = log_5 5$.

$x = 5$. *Жообу: (а)*

6. *Чыгаруу:* $log_3(log_2(log_5 x)) = 0$,

$log_3(log_2(log_5 x)) = log_3^1$,

$log_2(log_5 x) = 1$,

$log_2(log_5 x) = log_2^2$,

$log_5 x = 2$,

$x = 5^2 = 25$. *Жообу: (д)*

7. *Чыгаруу:* $log_2(3x - 8) > 2$,

$log_2(3x - 8) > log_2 4$,

$3x - 8 > 4$,

$3x > 4 + 8$,

$3x > 12$,

$x > 4$. *Жообу: (в)*

8. *Чыгаруу:* $log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < -2$,

$log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < log_{\frac{1}{7}}(\frac{1}{7})^{-2}$,

$4x + 1 > 49$,

$4x > 49 - 1$,

$4x > 48$,

$x > 12$. *Жообу: (г)*

9. *Чыгаруу:* $log_{0,3}(2x-4) > log_{0,3}(x+1)$,

$2x - 4 < x + 1$ *жана* $2x - 4 > 0$,

$2x - x < 1 + 4$, $2x > 4$,

$x < 5$. $x > 2$.

Демек, $2 < x < 5$. *Жообу: (б)*

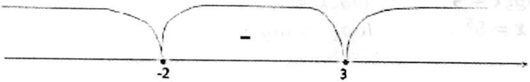
10. *Чыгаруу:* $lgx + lg(x-1) < lg6$,

$lgx \cdot (x-1) < lg6$,

$x \cdot (x-1) < 6$,

$x^2 - x - 6 < 0$,

$(x-3)(x+2) < 0$,



Демек,

$x \in (-2; 3)$

Бирок $lg(x-1)$ *туюнтмасы* $x - 1 > 0$ $x > 1$ *болгондо мааниге ээ.*

Ошондуктан $(-2; 3) \cap (1; +\infty) = (1; 3)$

$1 < x < 3$. *Жообу: (д)*

Тест-22. Салыштыруу эсептеринин жоопторy.

1. *Чыгаруу:* $860 \cdot (7+3) = 860 \cdot 10$, $860 \cdot (9-3) = 860 \cdot 6$, *демек,* $860 \cdot 10 > 860 \cdot 6$

Жообу: А

2. *Чыгаруу:* $2^6 = 64$, $3^4 = 81$, *демек,* $3^4 > 2^6$. *Жообу: Б*

3. *Чыгаруу:* $0{,}5 \cdot 640 > 0{,}1 \cdot 640$ *анткени* $0{,}5 > 0{,}1$. *Жообу: А*

4. *Чыгаруу:* $75 : 5 \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45$, $75 \cdot 5 : 3 = 375 : 3 = 125$.
Жообу: Б

5. *Чыгаруу:* $\frac{8}{45}, \frac{9}{46}$ *бирдей бөлүмгө келтиребиз.*
$\frac{8 \cdot 46}{45 \cdot 46} = \frac{368}{2070}$; $\frac{9 \cdot 45}{46 \cdot 45} = \frac{405}{2070}$; *демек* $\frac{368}{2070} < \frac{405}{2070}$. *Жообу: Ь*

6. *Чыгаруу:* $0{,}01 \cdot 17$, $17 \cdot 10^{-2}$, $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$,
Демек, $0{,}01 \cdot 17 = 17 \cdot 10^{-2}$. *Жообу: В*

7. *Чыгаруу:* $\frac{30}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{4}$; $\frac{75}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{3}{4}$; *демек* $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$. *Жообу: А*

8. *Чыгаруу:* $2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$; $2 : \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{3}{1} = 6$ *демек* $2\frac{1}{3} < 6$
Жообу: Б

9. *Чыгаруу:* $\frac{5 \cdot (-10)^2}{0{,}01} = \frac{5 \cdot 100}{0{,}01} = 10000$;
$\frac{7 \cdot (-10)^3}{0{,}001} = \frac{7 \cdot (-1000)}{0{,}001} = -700000$ *демек, Жообу: А*

10. *Чыгаруу:* $0{,}3^3 = 0{,}027$; $0{,}2^5 = 0{,}00032$ *демек, Жообу: А*

11. *Чыгаруу:* $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$; *демек, Жообу: В*

12. *Чыгаруу:* $\left(-\frac{7}{5}\right)^5 < 0$, *ошондуктан* $\left(\frac{7}{5}\right)^3 > \left(-\frac{7}{5}\right)^5$ *Жообу: А*

Тест-23. $a + b = 5$, $b - a = -1$, *шартынан* $a = 3$, $b = 2$ *экендиги келип чыгат.*

1. *Чыгаруу:* $a > b$, *анткени,* $b - a = -1 < 0$. *Жообу: А*

2. *Чыгаруу:* $ab^2 - a^2b = ab(b - a) = ab(-1) = -ab$,
демек, $ab^2 < a^2b$. *Жообу: Б*

3. *Чыгаруу:* $a^3 = 3^3 = 27$; $b^4 = 2^4 = 16$
демек, $a^3 > b^4$. *Жообу: А*

4. *Чыгаруу:* $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ *демек,* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. *Жообу: Б*

5. *Чыгаруу:* $\frac{b+1}{a} = \frac{2+1}{3} = 1$, $\frac{a+1}{b} = \frac{3+1}{2} = 2$

демек $\frac{b+1}{a} < \frac{a+1}{b}$. *Жообу: Б*

6. *Чыгаруу:* Берилген $2a - b = 3$, $a \cdot b = 2$ *шарттарынан* a *жана* b *чоңдуктарын таап алабыз.*

$\begin{cases} 2a - b = 3, \\ a \cdot b = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 2a - 3, \\ a \cdot (2a - 3) = 2 \end{cases}$ $2a^2 - 3a - 2 = 0,$

$D = 9 + 16 = 25$, $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, *демек,* $a = 2$, $b = 1$.

Эми салыштырууларды аткарабыз.

$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$; $b^{-1} = \frac{1}{b} = \frac{1}{1} = 1$ *Демек,* $a^{-1} < b^{-1}$. *Жообу: Б*

7. *Чыгаруу:* $(2a - b)^3 = (2 \cdot 2 - 1)^3 = 3^3 = 27$;
$(a \cdot b)^4 = (2 \cdot 1)^4 = 2^4 = 16$, *демек* $27 > 16$. *Жообу: А*

8. *Чыгаруу:* $a^2 = 2^2 = 4$, $(-1)^3 = -1$, *демек* $4 > -1$

Жообу: А

9. *Чыгаруу:* $(a - b)^3 = (2 - 1)^3 = 1$; $(a + b)^2 = (2 + 1)^2 = 27$

Жообу: Б

10. *Чыгаруу:* $(2a - 1)^2 = (2 \cdot 2 - 1)^2 = 3^2 = 9$,

$b^2 + 8 = 1^2 + 8 = 9$. *Жообу: В*

11. *Чыгаруу:* $\left(\frac{3}{b}\right)^3 = \left(\frac{3}{1}\right)^3 = 27$, $a^2 = 2^2 = 4$

демек, Жообу: А

12. *Чыгаруу:* $2a = 2 \cdot 2 = 4$, $b + 4 = 1 + 4 = 5$, $4 < 5$.

Жообу: Б

Тест-24. Амалдарды аткаруу.

1. *Чыгаруу:* $0{,}2 \cdot 3 = 0{,}6$; $\frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5} = 0{,}6$; *демек А=Б*

Жообу: В

2. *Чыгаруу:* ЭЧЖБ $(60; 40) = 20$; ЭЧЖБ $(8; 6)$ *демек,*

Жообу: Б

3. *Чыгаруу:* $\frac{(0{,}1)^{-2}}{10^5} = \frac{10^2}{10^5} = \frac{1}{10^3}$; $\frac{7}{(0{,}1)^{-6}} = \frac{7}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-6}} = \frac{7}{10^6}$,

демек *Жообу: А*

4. *Чыгаруу:* $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{35}$, $\frac{1}{5}:\frac{1}{7}=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{1}=\frac{7}{5}$, *демек,* $\frac{1}{35}<\frac{7}{5}$.

Жообу: Б

5. *Чыгаруу:* $0{,}5\cdot10^{-7}$, $\frac{0{,}5}{10^7}=0{,}5\cdot10^{-7}$, *демек* А = Б.

Жообу: Б

6. *Чыгаруу:* $\left(\frac{1}{3}-1\right)^3$ *мында* $\frac{1}{3}-1<0$; $\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$ *мында* $1-\frac{1}{3}>0$, *Терс сандын так даражасы терс болот.*

Ошондуктан $\left(\frac{1}{3}-1\right)^3<\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$. *Жообу: Б*

7. *Чыгаруу:* $\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1}{1000}$, $(0{,}1)^4=0{,}0001$

демек $\left(\frac{1}{10}\right)^3>(0{,}1)^4$. *Жообу: А*

8. *Чыгаруу:* $(0{,}1)^3\cdot10^3=0{,}001\cdot1000=1$,

$\left(\frac{1}{10}\right)^5\cdot10^5=\frac{1}{10^5}\cdot10^5=1$, *демек Жообу: В*

9. *Чыгаруу:* $7\cdot11^{-1}=\frac{7}{11}$;

$2\cdot11^{-1}+3\cdot11^{-1}+4\cdot11^{-1}=\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{9}{11}$, $\frac{7}{11}<\frac{9}{11}$

демек, Жообу: Б

10. *Чыгаруу:* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^5-2^3=32-8=24$,

$24<27$. *Жообу: Б*

11. *Чыгаруу:* $\sqrt[4]{27\cdot48}=\sqrt[4]{27\cdot3\cdot16}=\sqrt[4]{81\cdot16}=3\cdot2=6$,

$\sqrt[3]{25\cdot40}=\sqrt[3]{25\cdot5\cdot8}=\sqrt[3]{125\cdot8}=5\cdot2=10$

демек, Жообу: Б

12. *Чыгаруу:* $\frac{5!\cdot7!}{6!\cdot5!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7!}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot5!}=\frac{7}{1}=7$, $\frac{5!\cdot6!}{3!\cdot7!}=\frac{5\cdot4}{7}=\frac{20}{7}$

$7>\frac{20}{7}$. *Жообу: А*

Тест-25

1. *Чыгаруу:* $a>0$, $b<0$; *терс сандын так даражасы терс сан болот, б.а.* $b^7<0$, $a^5>0$ *демек* $a^5>b^7$ *Жообу: А*

2. *Чыгаруу:* $a+b$ *суммасынын белгиси анык эмес.*

Ошондуктан салыштырууга мүмкүн эмес. *Жообу: Г*

3. Чыгаруу: $a \cdot b < 0$, демек $\frac{a \cdot b}{d} > 0$ болот.

$b + d < 0$, демек $\frac{b+d}{c} < 0$ болот.

$\frac{a \cdot b}{d} > \frac{b+d}{c}$. Жообу: А

4. Чыгаруу: $b \cdot c < 0$, демек, $(b \cdot c)^3 < 0$ болот.
$a \cdot d < 0$, $(a \cdot d)^2 > 0$, демек $(b \cdot c)^3 < (a \cdot d)^2$ Жообу: Б

5. Чыгаруу: $a + c > 0$, $\frac{a+c}{d} < 0$ жана $b + d < 0$, $\frac{b+d}{d} > 0$

демек $\frac{a+c}{d} < \frac{b+d}{d}$. Жообу: Б

6. Чыгаруу: $a + 7 > 0$; $d - 7 < 0$, демек $a + 7 > d - 7$.

Жообу: А

7. Чыгаруу: $a > 1$ болсо $a^2 < a^4$ Жообу: Б

8. Чыгаруу: $a + 5 > a - 1$ демек $\frac{a+5}{a+6} > \frac{a-1}{a+6}$ болот.

Жообу: А

9. Чыгаруу: $a > 1$ демек, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 < a^3$. Жообу: Б

10. Чыгаруу: $(-1)^5 a = -a$, $(-1)^3 \cdot a = -a$. Жообу: В
11. Чыгаруу: $1 - a < 0$ ошондуктан $(1 - a)^3 < 0$ болот.
Демек, $(1 - a)^3 < (1 + a)^2$. Жообу: Б
12. Чыгаруу: a нын мааниси анык эмес, аны 27 менен салыштырууга мүмкүн эмес. Жообу: Г

Тест-26

1. Чыгаруу: $c > c^2 > c^3$ шартынан $c < 1$ экендигин билебиз.
Мындан $c^3 < 1$ экендиги келип чыгат. Жообу: Б
2. Чыгаруу: $1 > c^2$ Жообу: А

3. Чыгаруу: $c^5 < c^4$ демек, Жообу: Б

4. Чыгаруу: $\frac{1}{c} < \frac{1}{c^3}$ демек, Жообу: Б

5-12. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$.

5. *Чыгаруу: 5-12.* $f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11,\ \ g(3) = 3^2 - 1 = 8$

$f(5) > g(3)$. *Жообу: Б*

6. *Чыгаруу:* $f(-3) = 2 \cdot (-3) + 1 = -5,\ \ g(-5) = (-5)^2 - 1 = 24$

$f(-3) < g(-5)$. *Жообу: Б*

7. *Чыгаруу:* $g(5) = 24,\ f(1) = 3,\ \frac{g(5)}{f(1)} = \frac{24}{3} = 8.$

$f(2) = 5,\ g(3) = 8,\ \ f(2) \cdot g(3) = 5 \cdot 8 = 40.$

Демек, $8 < 40$. *Жообу: Б*

8. *Чыгаруу:* $f(9) = 19,\ g(4) = 15,\ f(9) - g(4) = 19 - 15 = 4$

$f(2) = 5,\ g(1) = 0,\ f(2) + g(1) = 5 + 0 = 5$ *демек* А < Б

Жообу: Б

9. *Чыгаруу:* ЭЧЖБ (8; 11) = 1; ЭЧЖБ (9; 8) = 1

демек А = Б *Жообу: В*

10. *Чыгаруу:* $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$

$4! - 3! = 24 - 6 = 18.$

$5!;4! = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$ *демек* А > Б *Жообу: А*

11. *Чыгаруу:* $\sqrt{\frac{5}{7}} + \sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{5+7}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{35}}$, *демек,*

Жообу: В

12. *Чыгаруу:* $\frac{3^7+3^7+3^7}{3^6+3^6+3^6} = \frac{3 \cdot 3^7}{3 \cdot 3^6} = 3,$

$\frac{7^{40} - 7^{39}}{7^{40}} = \frac{7^{39}(7-1)}{7^{40}} = \frac{6}{7},\ \ 3 > \frac{6}{7}$ *демек, Жообу: А*

Тиркеме 3.

Маалымат үчүн формулалар

1. *Сандын модулу* $|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$,

2. *Даражалар:*

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;
6) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;
7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. *Кыскача көбөйтүүнүн формулалары:*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4. *Тамыр*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

5. *Арифметикалык прогрессия*

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$a_n - a_{n-1} = d$ – *прогрессиянын айырмасы,*

$a_n = a_1 + d(n-1)$ - *жалпы мүчөсүнүн формуласы,*

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ -*алгачкы* n *мүчөсүнүн суммасы*

6. *Геометриялык прогрессия*

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ *-геометриялык прогрессиянын бөлүмү,*

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ *- жалпы мүчөсүнүн формуласы,*

$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q > 1$ *-өсүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы,*

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q < 1$ *- кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы,*

$S_n = \frac{b_1}{1-q}$, *- чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы,*

7. *Тригонометриялык негизги теңдештиктер*

$\cos^2 \propto + \sin^2 \propto = 1$ $\quad tg \propto \cdot ctg \propto = 1$

$tg \propto = \frac{\sin\propto}{\cos\propto}.$ $\quad 1 + ctg^2 \propto = \frac{1}{\sin^2\propto}$

$ctg \propto = \frac{\cos\propto}{\sin\propto}$ $\quad 1 + tg^2 \propto = \frac{1}{\cos^2\propto}$

$$tg \propto = \frac{1}{ctg \propto}$$

$$ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$$

8. *Кошуунун формулалары*

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

$tg(\propto \pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta};$

$ctg(\propto \pm\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$

9. *Эселенген бурчтун формулалары*

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$ $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$ $\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$ctg 2\alpha = \frac{ctg\alpha - 1}{2ctg\alpha};$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

10. *Жарым бурчтун формулалары*

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

11. *Сумманы жана айырманы көбөйтүндүгө өзгөртүп түзүү формулалары*

$$\sin\propto + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\propto - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\propto + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\propto - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\propto + tg\beta = \frac{\sin(\propto+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$tg\propto - tg\beta = \frac{\sin(\propto-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$ctg\propto + ctg\beta = \frac{\sin(\propto+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$ctg\propto - ctg\beta = \frac{\sin(\propto-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

12. $\sin\propto\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$

$$\cos\propto\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\propto\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

13. *Туундулар*

$c' = 0$ $\qquad (e^x)' = e^x$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$

$x' = 1$ $\quad (a^x)' = a^x lna$ $\quad (cosx)' = -sinx$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad (lnx)' = \frac{1}{x}$ $\quad (tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$

$(u + \vartheta)' = u' + \vartheta'$ $\quad (log_a x)' = \frac{1}{xlna}$ $\quad (ctgx)^1 = -\frac{1}{sin^2x}$

$(u \cdot \vartheta)' = u' \cdot \vartheta + u \cdot \vartheta'$

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \frac{u' \cdot \vartheta - u \cdot \vartheta' u}{\vartheta^2}$$

Татаал функциялардын туундулары

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\quad ((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$

$(sinu)' = u' \cdot cosu$ $\quad (sin(kx + b))' = kcos(kx + b)$

$(cosu)' = -u' \cdot sinu$ $\quad (cos(kx + b))' = -k' \cdot sin(kx + b)$

$(tgu)' = u' \cdot \frac{1}{cos^2u}$ $\quad (tg(kx + b))' = \frac{k}{cos^2(kx + b)}$

$(ctgu)^1 = u' \cdot \frac{1}{sin^2u}$ $\quad (ctg(kx + b)' = -\frac{1}{sin^2(kx + b)}$

$(lnu)' = u' \cdot \frac{1}{u}$ $\quad (ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b}$

$(log_a u)' = u' \cdot \frac{1}{ulna}$ $\quad (log_a(kx + b))' = \frac{k}{(kx + b)lna}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $\quad (e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$

$(a^u)' = u' \cdot a^u lna$ $\quad (a^{kx+b})' = ka^{kx+b} lna$

14. Экспоненталар жана логарифмдер

$a^{log_a x} = x$ $\quad log_a(xy) = log_a x + log_a y$

$a^x = e^{xlna}$ $\quad log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$

$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$ $\quad log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} log_a x$

$log_a x^k = k\, log_a x$ $\quad log_a b = \frac{1}{log_b a}$

15. Интеграл

1. $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

2. $\left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x)$

Интегралдоо формулалары

$$\int kdx = kx + c$$
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$$
$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$
$$\int cosxdx = sinx + c$$
$$\int sinxdx = -cosx + c$$
$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tgx + c$$
$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = ctgx + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = arcsin\frac{x}{a} + c$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$$
$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} ln\frac{x-a}{x+a} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - m}} dx = ln(x + \sqrt{x^2 - m} + c$$

Бөлүктөп интегралдоо формуласы

$$\int ud\vartheta = u \cdot \vartheta + \int ud\vartheta$$

Пайдаланылган адабияттар

1. *М.Иманалиев, А.Асанов, К.Жусупов, С.Искандаров. Алгебра жана анализдин башталышы. Бишкек-2009;*
2. *Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. Алгебра жана анализдин башталышы. Бишкек-2003;*
3. *В.Г.Болтянский, Ю.В.Сидоров, М.И.Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. Издателбство «Наука», Москва-1972;*
4. *Жалпы республикалык тестирлөөгө даярдоо китеби. «Секом» билим берүү мекемеси, Бишкек-2016.*

МАЗМУНУ